Příklady na cvičení ke 4. přednášce

Příklad 1.: Nezávisle opakovaná laboratorní měření určité konstanty jsou charakterizována náhodným výběrem $X_1, ..., X_n$, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, ..., n$. Uvažme statistiky

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ L_n = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

a) Dokažte, že M_n a L_n jsou nestranné odhady konstanty μ a zjistěte, který z nich je lepší.
b) Dokažte, že $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří posloupnosti asymptoticky nestranných odhadů konstanty μ.
c) Zjistěte, zda $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří posloupnosti konzistentních odhadů konstanty μ.

Výsledek: a) M_n je lepší odhad než L_n pro $n \geq 3$. b) Asymptotická nestrannost plyne z nestrannosti. c) $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupností konzistentních odhadů konstanty μ, avšak $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ není posloupností konzistentních odhadů konstanty μ.

Příklad 2.: Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ jsou stochasticky nezávislé náhodné výběry, první z rozložení se střední hodnotou μ_1 a rozptylem σ^2, druhý z rozložení se střední hodnotou μ_2 a rozptylem σ^2. Označme M_1, M_2 výběrové průměry, S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly a

$$S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$ vážený průměr výběrových rozptylů

a) Dokažte, že statistika $M_1 - M_2$ je nestranným odhadem parametrické funkce $\mu_1 - \mu_2$.
b) Dokažte, že S_*^2 je nestranným odhadem σ^2.

Příklad 3.: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení Rs(0,b), kde $b > 0$ je neznámý parametr. Jsou definovány statistiky $T_1 = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{6}X_4$ a

$T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$. Ukažte, že T_1, T_2 jsou nestranné odhady parametru b a určete, který odhad je lepší.
Výsledek: T_2 je lepší než T_1.

Příklad 4.: Nechť $X_1, ..., X_9$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu;0{,}01)$. Realizace výběrového průměru je $m = 3$. Sestrojte $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ, je-li a) $\alpha = 0{,}01$, b) $\alpha = 0{,}05$, c) $\alpha = 0{,}1$.
Výsledek: a) 2,914 mm < μ < 3,086 mm s pravděpodobností aspoň 0,99.
b) 2,935 mm < μ < 3,065 mm s pravděpodobností aspoň 0,95.
c) 2,945 mm < μ < 3,055 mm s pravděpodobností aspoň 0,90.

Příklad 5.: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu;0{,}01)$. Realizace výběrového průměru je $m = 3$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ, je-li a) $n = 4$, b) $n = 9$, c) $n = 16$.
Výsledek: a) 2,902 mm < μ < 3,098 mm s pravděpodobností aspoň 0,95.
b) 2,935 mm < μ < 3,065 mm s pravděpodobností aspoň 0,95.
c) 2,951 mm < μ < 3,049 mm s pravděpodobností aspoň 0,95.

Příklad 6.: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu, 0{,}04)$. Jaký musí být minimální rozsah výběru, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla číslo 0,16?
Výsledek: $n \geq 25$

Příklad 7.: Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozložení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Kolik měření je nutno provést, aby se hloubka moře stanovila s chybou nejvýše $\pm 0{,}25$ m při riziku 0,05?
Výsledek: $n \geq 62$