Příklady na cvičení k 1. přednášce

1. příklad: Dokázat přepočtový vzorec $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
Řešení:

$$\Phi(-u) = \int_{-\infty}^{-u} \varphi(x)dx = \int_{u}^{\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)dx = 1 - \Phi(u)$$

2. příklad: Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X ~ N(20,16) nabude hodnotu menší než 12 nebo větší než 28?
Řešení:

$$P(X < 12 \vee X > 28) = 1 - P(12 \leq X \leq 28) = 1 - P\left(\frac{12-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{28-20}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= 1 - P(-2 \leq U \leq 2) = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1 - \Phi(2)) = 2(1 - 0{,}97725) = 0{,}0455$$

3. příklad: Dlouhodobé zkušenosti s výsledky testu z matematiky na střední škole opravňují učitele k tomu, aby počet bodů v testu dosažených považoval za náhodnou veličinu X s rozložením $N(\mu,\sigma^2)$. Učitel se rozhodl, že bude test známkovat podle následujících pravidel:
výborně, když $X > \mu + \sigma$,
chvalitebně, když $\mu < X \leq \mu + \sigma$,
dobře, když $\mu - \sigma < X \leq \mu$,
dostatečně, když $\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma$,
nedostatečně, když $X \leq \mu - 2\sigma$.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student ze skupiny zkoušených studentů bude ohodnocen známkou

a) výborně
b) chvalitebně
c) dobře
d) dostatečně
e) nedostatečně?
f) Rozložení počtu bodů s hranicemi pro jednotlivé známky znázorněte na obrázku.

Řešení:
ad a)

$$P(X > \mu + \sigma) = 1 - P(X \leq \mu + \sigma) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P(U \leq 1) = 1 - \Phi(1) =$$

$$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

ad b)

$$P(\mu < X \leq \mu + \sigma) = P(0 < U \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}84134 - 0{,}5 = 0{,}34134$$

ad c)

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu) = P(-1 < U \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(0) - 1 = 0{,}5 + 0{,}84134 - 1 = 0{,}34134$$

ad d)

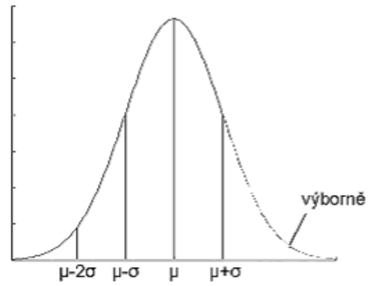
$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma) = P(-2 < U \leq -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1) - 1 + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$$= 0{,}97725 - 0{,}84134 = 0{,}13591$$

ad e)

$$P(X \leq \mu - 2\sigma) = P(U \leq -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$

ad f)



4. příklad: Dokázat platnost přepočtových vzorců pro kvantily u_α, $t_\alpha(n)$, $F_\alpha(n_1,n_2)$

Řešení:

ad a) Vzhledem k tomu, že hustota rozložení N(0,1) je sudá funkce, dostáváme

$$\Phi(-u_{1-\alpha}) = \int_{-\infty}^{-u_{1-\alpha}} \varphi(x)dx = \int_{u_{1-\alpha}}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{u_{1-\alpha}} \varphi(x)dx = 1 - \Phi(u_{1-\alpha}) = 1-(1-\alpha) = \alpha = \Phi(u_\alpha)$$

ad b) Analogicky, protože hustota Studentova rozložení je také sudá funkce.

ad c) Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$. Již bylo ukázáno, že transformovaná náhodná veličina $Y_1 = \dfrac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$. Tedy náhodná veličina $Y_2 = \dfrac{1}{Y_1} = \dfrac{X_2/n_2}{X_1/n_1} \sim F(n_2, n_1)$. Označme $\Phi(y_1)$ distribuční funkci náhodné veličiny Y_1 a $\Phi_*(y_2)$ distribuční funkci náhodné veličiny Y_2. Pak

$$\alpha = \Phi(K_\alpha(Y_1)) = P(Y_1 \le K_\alpha(Y_1)) = P\left(\frac{1}{Y_1} \ge \frac{1}{K_\alpha(Y_1)}\right) = 1 - P\left(Y_2 \le \frac{1}{K_\alpha(Y_1)}\right) = 1 - \Phi_*\left(\frac{1}{K_\alpha(Y_1)}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_*\left(\frac{1}{K_\alpha(Y_1)}\right) = 1-\alpha \Rightarrow K_{1-\alpha}(Y_2) = \frac{1}{K_\alpha(Y_1)}$$

neboli $K_\alpha(Y_1) = \dfrac{1}{K_{1-\alpha}(Y_2)}$. Ve speciálním označení: $F_\alpha(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$.

5. příklad: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0, 1)$, i = 1, 2. Zjistěte, jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $Y = 3 + X_1 - 2X_2$, určete jeho parametry a najděte dolní kvartil náhodné veličiny Y.

Řešení:

$Y \sim N(E(Y), D(Y))$, přičemž $E(Y) = E(3 + X_1 - 2X_2) = 3 + E(X_1) - 2E(X_2) = 3 + 3.0 - 2.0 = 3$, $D(Y) = D(3 + X_1 - 2X_2) = D(X_1) + (-2)^2 D(X_2) = 1 + 4.1 = 5$, tedy $Y \sim N(3,5)$. Nyní vypočítáme dolní kvartil. Využijeme toho, že $U = \dfrac{Y-3}{\sqrt{5}} \sim N(0, 1)$, tedy

$K_{0,25}(Y) = 3 + \sqrt{5}\, u_{0,25} = 3 - \sqrt{5}\,.0,67449 = 1,4918$.

6. příklad: Hledání v tabulkách kvantilů (např. Sbírka 10.1., 10.2., 10.3., 10.5.)

7. příklad:

Nechť X_1, X_2, X_3, X_4 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0, 1)$, i = 1, 2, 3, 4. jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $X = \dfrac{X_1\sqrt{3}}{\sqrt{X_2^{\,2} + X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}}$?

Řešení:
$X \sim t(3)$, protože $X_1 \sim N(0, 1)$ a $X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \sim \chi^2(3)$.

8. příklad: Nechť náhodná veličina $X \sim F(n_1, n_2)$. Jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $Y = 1/X$?
Řešení: $Y \sim F(n_2, n_1)$

9. příklad: Nechť náhodná veličina $X \sim t(n)$. Jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $Y = X^2$?
Řešení: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim \chi^2(n)$.

Pak $\dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{n}}} \sim t(n)$. Přitom $X_1^{\,2} \sim \chi^2(1)$, tedy $Y = \dfrac{X_1^{\,2}}{\dfrac{X_2}{n}} \sim F(1, n)$.

10. příklad: Automat na kávu je seřízen tak, že plní šálky po 250 ml kávy se směrodatnou odchylkou 18 ml. Předpokládáme, že množství kávy v šálku se řídí normálním rozložením.
a) Kolik procent šálků bude obsahovat méně než 262 ml kávy?
b) Kolik procent šálků bude obsahovat mezi 241 ml až 259 ml kávy?
c) Kolik procent šálků bude obsahovat aspoň 253 ml kávy?

Řešení:
Náhodná veličina X udává množství kávy v náhodně vybraném šálku, $X \sim N(250, 18^2)$.

ad a) $P(X < 262) = P\left(\dfrac{X-250}{18} < \dfrac{262-250}{18}\right) = P\left(U < \dfrac{2}{3}\right) = \Phi\left(\dfrac{2}{3}\right) \doteq 0{,}74857$, tedy asi 74,9% šálků bude obsahovat méně než 262 ml kávy.

ad b)
$$P(241 < X < 259) = P\left(\frac{241-250}{18} < \frac{X-250}{18} < \frac{259-250}{18}\right) = P\left(U < \frac{1}{2}\right) - P\left(U < -\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}69146 - 1 \doteq 0{,}38292$$
Asi 38,3% šálků bude obsahovat mezi 241 ml až 259 ml kávy.

ad c)
$$P(X > 253) = P\left(\frac{X-250}{18} > \frac{253-250}{18}\right) = 1 - P\left(U \le \frac{1}{6}\right) = 1 - \Phi(0.17) \doteq 1 - 0{,}56749 = 0{,}43251$$
Asi 43,3% šálků bude obsahovat aspoň 253 ml kávy.