10. Neparametrické testy o mediánech

10.1. Motivace: Při aplikaci t-testů či analýzy rozptylu by měly být splněny určité předpoklady:

- normalita dat (pro výběry větších rozsahů ($n \geq 30$) nemá mírné porušení normality závažný dopad na výsledky)
- homogenita rozptylů
- intervalový či poměrový charakter dat

Pokud nejsou tyto předpoklady splněny, použijeme tzv. neparametrické testy, které nevyžadují předpoklad o konkrétním typu rozložení (např. normálním), stačí např. předpokládat, že distribuční funkce rozložení, z něhož náhodný výběr pochází, je spojitá.
Nevýhoda - ve srovnání s klasickými parametrickými testy jsou neparametrické testy slabší, tzn., že nepravdivou hypotézu zamítají s menší pravděpodobností než testy parametrické.
V této kapitole se omezíme na ty neparametrické testy, které jsou založeny na pořadí a týkají se mediánů. Nazývají se pořadové testy.

10.2. Pojem pořadí a průměrného pořadí

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr.
Vektor $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$, kde $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ se nazývá uspořádaný náhodný výběr a statistika $X_{(i)}$ se nazývá i-tá pořádková statistika, $i = 1, ..., n$.
Pořadím R_i statistiky X_i rozumíme počet těch náhodných veličin $X_1, ..., X_n$, které nabývají hodnoty menší nebo rovné X_i, tj. $R_i = \mathrm{card}\{j; X_j \leq X_i\}$.
V praxi se může stát, že některá pozorování jsou si rovna a vytvářejí skupiny shodných čísel. Pak těmto shodným číslům přiřadíme průměrné pořadí odpovídající takové skupině.

Příklad: Máme čísla 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Stanovte jejich pořadí.
Řešení:

usp.hodnoty	1,8	1,8	1,9	2	2	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
průměrné pořadí	1,5	1,5	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10

10.3. Jednovýběrový znaménkový test a jeho asymptotická varianta

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení se spojitou distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $x_{0,50}$ je mediánem tohoto rozložení, tj. $\Phi(x_{0,50}) = 0,5$. Nechť c je reálná konstanta. Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = c$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq c$ (resp. proti levostranné alternativě H_1: $x_{0,50} < c$ resp. proti pravostranné alternativě H_1: $x_{0,50} > c$).

Postup provedení testu:

a) Utvoříme rozdíly $Y_i = X_i - c$, $i = 1, ..., n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)
b) Zavedeme statistiku S_Z^+, která udává počet těch rozdílů, které jsou kladné. Platí-li H_0, pak $S_Z^+ \sim Bi(n,1/2)$, tedy $E(S_Z^+) = n/2$, $D(S_Z^+) = n/4$.
c) Stanovíme kritický obor.
Pro oboustrannou alternativu ho budou tvořit ty hodnoty testové statistiky S_Z^+, které jsou blízké 0 nebo n, tedy $W = \langle 0, k_1 \rangle \cup \langle k_2, n \rangle$, kde nezáporná celá čísla k_1, k_2, splňují podmínky

$$P(S_Z^+ \le k_1) \le \frac{\alpha}{2}, \; P(S_Z^+ \ge k_2) \le \frac{\alpha}{2}$$

Pro levostrannou alternativu: $W = \langle 0, k_1 \rangle$, kde nezáporné celé číslo k_1 splňuje podmínku $P(S_Z^+ \le k_1) \le \alpha$
Pro pravostrannou alternativu: $W = \langle k_2, n \rangle$, kde nezáporné celé číslo k_2 splňuje podmínku $P(S_Z^+ \ge k_2) \le \alpha$
(Čísla k_1, k_2 pro oboustranný test i pro jednostranné testy lze najít ve statistických tabulkách.)
d) H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $S_Z^+ \in W$.

Asymptotická varianta testu:
Pro velká n (prakticky $n > 20$) lze využít asymptotické normality statistiky S_Z^+.
Testová statistika $U_0 = \frac{S_Z^+ - E(S_Z^+)}{\sqrt{D(S_Z^+)}} = \frac{S_Z^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$ má za platnosti H_0 asymptoticky rozložení N(0,1).
Kritický obor
- pro oboustrannou alternativu: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$,
- pro levostrannou alternativu: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$,
- pro pravostrannou alternativu: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$.

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Aproximace rozložením N(0,1) se zlepší, když použijeme tzv. korekci na nespojitost. Testová statistika pak má tvar $U_0 = \frac{S_Z^+ - \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$, přičemž 1/2 přičteme, když $S_Z^+ < n/2$ a odečteme v opačném případě.

10.4. Příklad: U 10 náhodně vybraných vzorků benzínu byly zjištěny následující hodnoty oktanového čísla: 98,2 96,8 96,3 99,8 96,9 98,6 95,6 97,1 97,7 98,0. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián oktanového čísla je 98 proti oboustranné alternativě.

Řešení:
Testujeme H_0: $x_{0,50} = 98$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 98$, kde $x_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází náhodný výběr $X_1, \ldots, X_{10}$.
rozdíly $x_i - 98$: 0,2 -1,2 -1,7 1,8 -1,1 0,6 -2,4 -0,9 -0,3 0,0
$S_Z^+ = 3$, nenulových rozdílů je 9. Ve statistických tabulkách najdeme pro n = 9 a $\alpha = 0{,}05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0{,}1\rangle \cup \langle 8{,}9\rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 10 případy. Do proměnné X napíšeme hodnoty oktanového čísla a do proměnné konst uložíme číslo 98.
Statistiky –Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, Druhý seznam proměnných konst – OK – Znaménkový test.

	Znaménkový test (oktanove cislo) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
X & konst	9	66,66667	0,666667	0,504985

Vidíme, že nenulových hodnot n = 9. Z nich záporných je 66,7%, tj. 6. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 9 - 6 = 3$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 0,6667. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,505, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že medián oktanového čísla je 98.

Upozornění: V tomto případě není splněna podmínka pro využití asymptotické normality statistiky S_Z^+, tj. n > 20. Je tedy vhodnější najít v tabulkách kritické hodnoty pro znaménkový test. Pro n = 9 a $\alpha = 0{,}05$ jsou kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0{,}1\rangle \cup \langle 8{,}9\rangle$ neobsahuje hodnotu 3, nezamítáme H_0 na hladině významnosti 0,05. Dostáváme týž výsledek jako při použití asymptotického testu.

10.5. Párový znaménkový test

Nechť $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ je náhodný výběr ze spojitého dvourozměrného rozložení. Testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{0,50} = c$ proti H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq c$ (resp. proti jednostranným alternativám). Utvoříme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$, i = 1, ..., n a testujeme hypotézu o mediánu $z_{0,50}$, tj. H_0: $z_{0,50} = c$ proti H_1: $z_{0,50} \neq c$.

10.6. Příklad: U osmi osob byl změřen systolický krevní tlak před pokusem a po něm.

č. osoby	1	2	3	4	5	6	7	8
tlak před	130	185	162	136	147	181	138	139

tlak po 139 190 175 135 155 175 158 149

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že pokus neovlivní systolický krevní tlak

Řešení:

Testujeme H_0: $z_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $z_{0,50} \neq 0$, kde $z_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1$, … $Z_{15} = X_8 - Y_8$. Vypočteme rozdíly mezi tlakem před pokusem a po pokusu, čímž úlohu převedeme na jednovýběrový test.

rozdíly $x_i - y_i$: -9 -5 -13 1 -8 6 -30 -10

Testová statistika $S_Z^+ = 2$.Ve statistických tabulkách najdeme pro n = 8 a α = 0,05 kritické hodnoty $k_1 = 0$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = 0 \cup 8$ neobsahuje hodnotu 2, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 0,05 je zvýšení krevního tlaku stejně pravvděpodobné jako jeho pokles.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

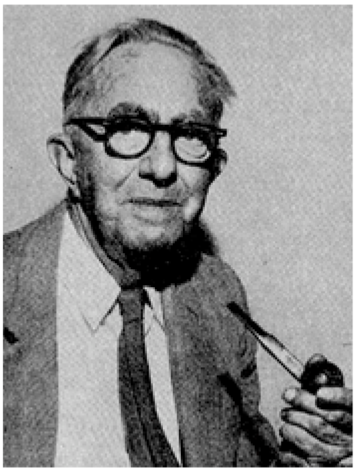
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 8 případy. Do proměnné X napíšeme hodnoty tlaku před pokusem, do proměnné Y hodnoty tlaku po pokusu.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných Y – OK – Znaménkový test.

	Znaménkový test (tlak.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
X & Y	8	75,00000	1,060660	0,288844

Vidíme, že nenulových hodnot n = 8. Z nich záporných je 75%, tj. 6. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 8 - 6 = 2$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 1,06066. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,2888, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že zvýšení krevního tlaku stejně pravděpodobné jako jeho pokles.

10.7. Jednovýběrový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta



Frank Wilcoxon (1892 – 1965): Americký statistik a chemik

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení s hustotou $\varphi(x)$, která je symetrická kolem mediánu $x_{0,50}$, tj. $\varphi(x_{0,50} + x) = \varphi(x_{0,50} - x)$. Nechť c je reálná konstanta.
Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = c$
proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq c$ nebo
proti levostranné alternativě H_1: $x_{0,50} < c$ nebo
proti pravostranné alternativě H_1: $x_{0,50} > c$.

Postup provedení testu:

a) Utvoříme rozdíly $Y_i = X_i - c$, $i = 1, \dots, n$. (Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot.)

b) Absolutní hodnoty $|Y_i|$ uspořádáme vzestupně podle velikosti a spočteme pořadí R_i.

c) Zavedeme statistiky

$S_W^+ = \sum_{Y_i>0} R_i^+$, což je součet pořadí přes kladné hodnoty Y_i,

$S_W^- = \sum_{Y_i<0} R_i^-$, což je součet pořadí přes záporné hodnoty Y_i.

Přitom platí, že součet $S_W^+ + S_W^- = n(n+1)/2$.
Je-li H_0 pravdivá, pak $E(S_W^+) = n(n+1)/4$ a $D(S_W^+) = n(n+1)(2n+1)/24$.

d) Testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-)$ pro oboustrannou alternativu,
= S_W^+ pro levostrannou alternativu,
= S_W^- pro pravostrannou alternativu.

e) H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když testová statistika je menší nebo rovna tabelované kritické hodnotě.

Asymptotická varianta jednovýběrového Wilcoxonova testu:

Pro $n \geq 30$ lze využít asymptotické normality statistiky S_W^+.

Platí-li H_0, pak $U_0 = \frac{S_W^+ - E(S_W^+)}{\sqrt{D(S_W^+)}} = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \approx N(0,1)$.

Kritický obor:

pro oboustrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$,

pro levostrannou alternativu $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$,

pro pravostrannou alternativu $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$

H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Předpoklady použití jednovýběrového Wilcoxonova testu:

- rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, je spojité
- hustota tohoto rozložení je symetrická kolem mediánu
- sledovaná veličina X má aspoň ordinální charakter

(Není-li splněn předpoklad o symetrii hustoty kolem mediánu, lze použít např. znaménkový test.)

10.8. Příklad: Pro zadání příkladu 10.4. proveďte jednovýběrový Wilcoxonův test.

Řešení:

Testujeme hypotézu H_0: $x_{0,50} = 98$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 98$.
Absolutní hodnoty rozdílů $x_i - 98$ setřídíme vzestupně podle velikosti (přitom vynecháme nulový rozdíl a kladné rozdíly značíme tučně):

abs (x_i – 98)	**0,2**	0,3	**0,6**	0,9	1,1	1,2	1,7	**1,8**	2,4
pořadí R_i	**1**	2	**3**	4	5	6	7	**8**	9

Součet pořadí přes kladné hodnoty rozdílů: $S_W^+ = 12$
Součet pořadí přes záporné hodnoty rozdílů: $S_W^- = 33$
Testová statistika = min(12,33) = 12, tabelovaná kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$ a $n = 9$ je 5. Protože 12 > 5, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 10 případy. Do proměnné oktan napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné konst uložíme číslo 98.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných oktan, 2. seznam proměnných konst – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (oktan.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
oktan & konst	10	12,00000	1,243933	0,213525

Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky SW^+ (zde označena T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 a p-hodnotu pro U_0. V tomto případě je p-hodnota 0,213525, tedy nulová hypotéza se nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

10.9. Párový Wilcoxonův test

Nechť $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n\ Y_n)$ je náhodný výběr ze spojitého dvourozměrného rozložení. Testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{,50} = c$ proti H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq c$ (resp. proti jednostranným alternativám). Utvoříme rozdíly $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ a testujeme hypotézu o mediánu $z_{0,50}$, tj. H_0: $z_{0,50} = c$ proti H_1: $z_{0,50} \neq c$.

10.10. Příklad: Pro data z příkladu 10.6. proveďte párový Wilcoxonův test.

Řešení:

Testujeme H_0: $z_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $z_{0,50} \neq 0$, kde $z_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \ldots Z_8 = X_8 - Y_8$.

Absolutní hodnoty rozdílů $x_i - y_i$ setřídíme vzestupně podle velikosti (kladné rozdíly značíme tučně):

abs $(x_i - y_i)$	**1**	5	**6**	8	9	10	13	20
pořadí R_i	**1**	2	**3**	4	5	6	7	8

Součet pořadí přes kladné hodnoty rozdílů: $S_W^+ = 4$

Součet pořadí přes záporné hodnoty rozdílů: $S_W^- = 32$

Testová statistika = min(4,3) = 4, tabelovaná kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$ a $n = 8$ je 3. Protože $4 > 3$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Použijeme datový soubor, který jsme již vytvořili pro aplikaci znaménkového testu.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných Y – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (tlak.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
X & Y	8	4,000000	1,960392	0,049951

Testová statistika (zde označená jako T) nabývá hodnoty 4, asymptotická testová statistika (označená jako Z) nabývá hodnoty 1,960392, odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,049951, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu zamítáme. To je v rozporu s výsledkem, k němuž jsme dospěli při ručním výpočtu. Je to způsobeno tím, že není dodržena podmínka pro použití asymptotické varianty Wilcoxonova testu – rozsah výběru má být aspoň 30.

10.11. Příklad (na asymptotickou variantu Wilcoxonova testu):

30 náhodně vybraných osob mělo nezávisle na sobě bez předchozího nácviku odhadnout, kdy od daného signálu uplyne 1 minuta. Byly získány následující výsledky (v sekundách): 53 48 45 55 63 51 66 56 50 58 61 51 64 63 59 47 46 58 52 56 61 57 48 62 54 49 51 46 53 58.

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že medián rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, je 60 sekund proti oboustranné alternativě (nulová hypotéza vlastně tvrdí, že polovina osob délku jedné minuty podhodnotí a druhá nadhodnotí).

Řešení:

Testujeme H_0: $x_{0,50} = 60$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 60$.

Obvyklým způsobem stanovíme statistiku $S_W^+ = 55$.

Asymptotická testová statistika:

$$U_0 = \frac{S_W^+ - E(S_W^+)}{\sqrt{D(S_W^+)}} = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} = \frac{55 - \frac{30(30+1)}{4}}{\sqrt{\frac{30(30+1)(2.30+1)}{24}}} = -3{,}65$$

Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right) = \left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right).$$

Testová statistika se realizuje v kritickém oboru, tedy H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 30 případy. Do proměnné odhad napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné konst uložíme číslo 60.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných odhad, Druhý seznam proměnných konst – OK – Wilcoxonův párový test.

	Wilcoxonův párový test (odhad minuty) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
odhad & konst	30	55,00000	3,650880	0,000261

Testová statistika (zde označená jako T) nabývá hodnoty 55, asymptotická testová statistika (označená jako Z) nabývá hodnoty 3,65088, odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,000261, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu zamítáme.

10.12. Dvouvýběrový Wilcoxonův test a jeho asymptotická varianta

Nechť $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení, jejichž distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím. Označme $x_{0,50}$ medián prvního rozložení a $y_{0,50}$ medián druhého rozložení. Testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné neboli mediány jsou shodné proti alternativě, že jsou rozdílné, tj.
H_0: $x_{0,50} - y_{0,50} = 0$ proti H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$.

Postup provedení testu:

a) Všech n + m hodnot $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ uspořádáme vzestupně podle velikosti.
b) Zjistíme součet pořadí hodnot $X_1, ..., X_n$ a označíme ho T_1.
Součet pořadí hodnot $Y_1, ..., Y_m$ označíme T_2.
c) Vypočteme statistiky $U_1 = mn + n(n+1)/2 - T_1$, $U_2 = mn + m(m+1)/2 - T_2$.
Přitom platí $U_1 + U_2 = mn$.
d) Pokud $\min(U_1,U_2) \leq$ tabelovaná kritická hodnota (pro dané rozsahy výběrů m, n a dané α), pak nulovou hypotézu o totožnosti obou distribučních funkcí zamítáme na hladině významnosti α. V tabulkách: $n = \min\{m,n\}$ a $m = \max\{m,n\}$.

Asymptotická varianta dvouvýběrového Wilcoxonova testu:

Pro velká n, m (n, m > 30) lze využít asymptotické normality statistiky U_1.

Platí-li H_0, pak $U_0 = \dfrac{U_1 - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \approx N(0,1)$, kde $U_1 = \min(U_1,U_2)$.

Kritický obor:
pro oboustrannou alternativu $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$,
pro levostrannou alternativu $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$,
pro pravostrannou alternativu $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$
H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $U_0 \in W$.

Předpoklady použití dvouvýběrového Wilcoxonova testu:

- dané dva náhodné výběry jsou nezávislé
- rozložení, z nichž dané dva náhodné výběry pocházejí, jsou spojitá
- distribuční funkce těchto rozložení se mohou lišit pouze posunutím
- sledovaná veličina má aspoň ordinální charakter

(Není-li splněn předpoklad, že distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím, lze použít např. dvouvýběrový Kolmogorovův – Smirnovův test.)

10.13. Příklad: Výrobce určitého výrobku se má rozhodnout mezi dvěma dodavateli polotovarů vyrábějících je různými technologiemi. Rozhodující je procentní obsah určité látky.
1. technologie: 1,52 1,57 1,71 1,34 1,68

2. technologie: 1,75 1,67 1,56 1,66 1,72 1,79 1,64 1,55

Na hladině významnosti 0,05 posuďte pomocí dvouvýběrového Wilcoxonova testu, zda je oprávněný předpoklad, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Řešení:

Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$.

usp.h.	**1,34**	**1,52**	1,55	1,56	**1,57**	1,64	1,66	1,67	**1,68**	**1,71**	1,72	1,75	1,79
pořadí	**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	**9**	**10**	11	12	13

$T_1 = 1 + 2 + 5 + 9 + 10 = 27$, $T_2 = 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 11 + 12 + 13 = 64$

$U_1 = 5.8 + 5.6/2 - 27 = 28$, $U_2 = 5.8 + 8.9/2 - 64 = 12$

Kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$, $\min(5,8) = 5$, $\max(5,8) = 8$ je 6. Protože $\min(28,12) = 12 > 6$, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 13 případy. Do proměnné X napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné ID napíšeme 5x číslo 1 pro první technologii a 8x číslo 2 pro starý druhou technologii.

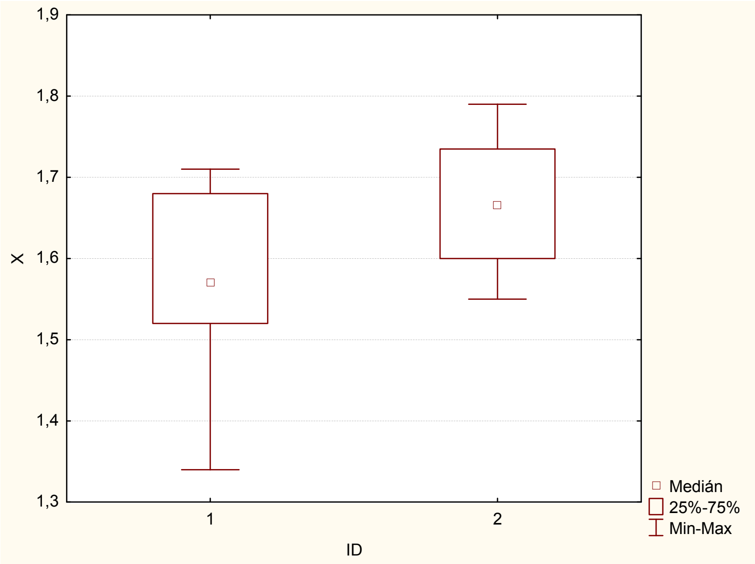
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – M-W U test.

Upozornění: Ve STATISTICE je dvouvýběrový Wilcoxonův test uveden pod názvem Mannův – Whitneyův test.

	Mann-Whitneyův U test (dve technologie.sta) Dle proměn. ID Označené testy jsou významné na hladině p <,05000									
Proměnná	Sčt poř. skup. 1	Sčt poř. skup. 2	U	Z	Úroveň p	Z upravené	Úroveň p	N platn. skup. 1	N platn. skup. 2	2*1str. přesné p
X	27,00000	64,00000	12,00000	-1,17108	0,241567	-1,17108	0,241567	5	8	0,284382

Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí T_1, T_2, hodnota testové statistiky $\min(U_1, U_2)$ označená U, hodnota asymptotické testové statistiky U_0 (označená Z), asymptotická p-hodnota pro U_0 a přesná p-hodnota (ozn. 2*1str. přesné p – ta se používá pro rozsahy výběrů pod 30). V našem případě přesná p-hodnota = 0,284382, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

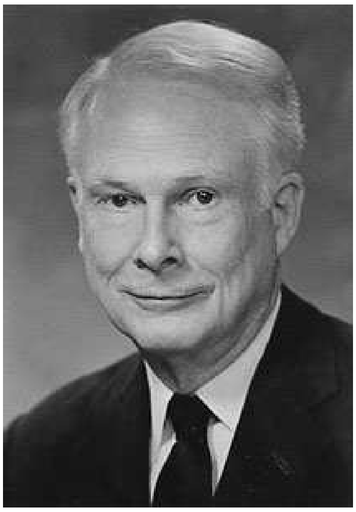
Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem.



Je zřejmé, že první technologie poskytuje vesměs nižší procento účinné látky než druhá technologie a také vykazuje poněkud větší variabilitu.

10.14. Kruskalův - Wallisův test

William Kruskal (1919 – 2005):
Americký matematik



Wilson Allen Wallis (1912 – 1988):
Americký matematik

Nechť je dáno $r \geq 3$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, \dots, n_r$. Předpokládáme, že tyto výběry pocházejí ze spojitých rozložení. Označme $n = n_1 + \dots + n_r$. Na asymptotické hladině významnosti α chceme testovat hypotézu, že všechny tyto výběry pocházejí z téhož rozložení.

Postup testu:

a) Všech n hodnot seřadíme do rostoucí posloupnosti.
b) Určíme pořadí každé hodnoty v tomto sdruženém výběru.

c) Označme T_j součet pořadí těch hodnot, které patří do j-tého výběru, j = 1, ..., r (kontrola: musí platit $T_1 + ... + T_r = n(n+1)/2$).

d) Testová statistika má tvar: $Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1)$. Platí-li H_0, má statistika Q asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$.

e) Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$.

f) H_0 zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(r-1)$.

10.15. Příklad: V roce 1980 byly získány tři nezávislé výběry obsahující údaje o průměrných ročních příjmech (v tisících dolarů) čtyř sociálních skupin ve třech různých oblastech USA.
jižní oblast: 6 10 15 29
pacifická oblast: 11 13 17 131
severovýchodní oblast: 7 14 28 25
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že příjmy v těchto oblastech se neliší.

Řešení:
Výpočty uspořádáme do tabulky

Usp. hodnoty	6	7	10	11	13	14	15	17	25	28	29	131
Pořadí 1.výběru	1		3				7				11	
Pořadí 2.výběru				4	5			8				12
Pořadí 3.výběru		2				6			9	10		

$T_1 = 1 + 3 + 7 + 11 = 22$,
$T_2 = 4 + 5 + 8 + 12 = 29$,
$T_3 = 2 + 6 + 9 + 10 = 27$,

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1) = \frac{12}{12 \cdot 13}\left(\frac{22^2}{4} + \frac{29^2}{4} + \frac{27^2}{4}\right) - 3 \cdot 13 = 0{,}5,$$

$$W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty) = \langle \chi^2_{0,95}(2), \infty) = \langle 5{,}991, \infty)$$

Protože Q < 5,991, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05. Rozdíly mezi průměrnými ročními příjmy v uvedených třech oblastech se neprokázaly.

10.16. Mediánový test

Výchozí situace je stejná jako u K-W testu

Postup testu:

a) Všech n hodnot uspořádáme do rostoucí posloupnosti.

b) Najdeme medián $x_{0,50}$ těchto n hodnot.

c) Označme P_j počet hodnot v j-tém výběru, které jsou větší nebo rovny mediánu $x_{0,50}$.

d) Testová statistika má tvar $Q_M = 4\sum_{j=1}^{r} \frac{P_j^2}{n_j} - n$. Platí-li H_0, má statistika Q_M asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$.

e) Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$.

f) H_0 zamítneme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q_M \geq \chi_{1-\alpha}^2(r-1)$.

10.17. Příklad:

Pro data o průměrných ročních příjmech proveďte mediánový test. Hladinu významnosti volte 0,05.

Řešení:

Usp. hodnoty 6 7 10 11 13 14 15 17 25 28 29 131

Medián je průměr 6. a 7. uspořádané hodnoty: $x_{0,50} = \frac{14+15}{2} = 14{,}5$.

V prvním výběru existují 2 hodnoty, které jsou větší nebo rovny 14,5, stejně tak i ve druhém a třetím výběru, tedy $P_1 = P_2 = P_3 = 2$.

Testová statistika: $Q_M = 4\sum_{j=1}^{r} \frac{P_j^2}{n_j} - n = 4\left[\frac{1}{4}\left(2^2 + 2^2 + 2^2\right)\right] - 12 = 0$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty) = \langle \chi^2_{0,95}(2), \infty) = \langle 5{,}991, \infty)$

Protože $Q_M < 5{,}991$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

10.18. Metody mnohonásobného porovnávání

Zamítneme-li hypotézu, že všechny náhodné výběry pocházejí z téhož rozložení, zajímá nás, které dvojice náhodných výběrů se liší na zvolené hladině významnosti. Testujeme H_0: k-tý a l-tý náhodný výběr pocházejí z téhož rozložení, k, l = 1, .., r, $k \neq l$ proti H_1: aspoň jedna dvojice výběrů pochází z různých rozložení.

a) Neményiho metoda (Peter Neményi 1927 – 2002: Americký matematik maďarského původu)

- Všechny výběry mají týž rozsah p (třídění je vyvážené).
- Vypočteme $|T_l - T_k|$.
- V tabulkách najdeme kritickou hodnotu (pro dané p, r, α).
- Pokud $|T_l - T_k| \geq$ tabelovaná kritická hodnota, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

b) Obecná metoda mnohonásobného porovnávání

- Vypočteme $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right|$.
- Ve speciálních statistických tabulkách najdeme kritickou hodnotu $h_{KW}(\alpha)$. Při větších rozsazích výběrů je možno ji nahradit kvantilem $\chi_{1-\alpha}^2(r-1)$.

- Jestliže $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right| \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_l} + \frac{1}{n_k}\right) n(n+1) h_{KW}(\alpha)}$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

10.19. Příklad:

Čtyři laboranti provedli analytické stanovení procenta niklu v oceli. Každý hodnotil pět vzorků.
Laborant A: 4,15 4,26 4,10 4,30 4,25
Laborant B: 4,38 4,40 4,29 4,39 4,45
Laborant C: 4,23 4,16 4,20 4,24 4,27
Laborant D: 4,41 4,31 4,42 4,37 4,43
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že všechny čtyři náhodné výběry pocházejí ze stejného rozložení. Pokud nulovou hypotézu zamítnete, zjistěte, které dvojice výběrů se liší.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných a 20 případech. Do proměnné nikl napíšeme změřené hodnoty, do proměnné laborant napíšeme 5x1 pro 1. laboranta atd. až 5x4 pro 4. laboranta.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků - OK – Seznam závislých proměnných nikl, Nezáv. (grupovací) proměnná laborant – OK – Summary: Kruskal-Wallis ANOVA & Median test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky K-W testu a mediánového testu.

Závislá: nikl	Kruskal-Wallisova ANOVA polož. na poř.; nikl (nikl v oceli) Nezávislá (grupovací) proměnná :laborant Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =13,77714 p =,0032		
	Kód	Počet platných	Součet pořadí
1	1	5	29,00000
2	2	5	75,00000
3	3	5	27,00000
4	4	5	79,00000

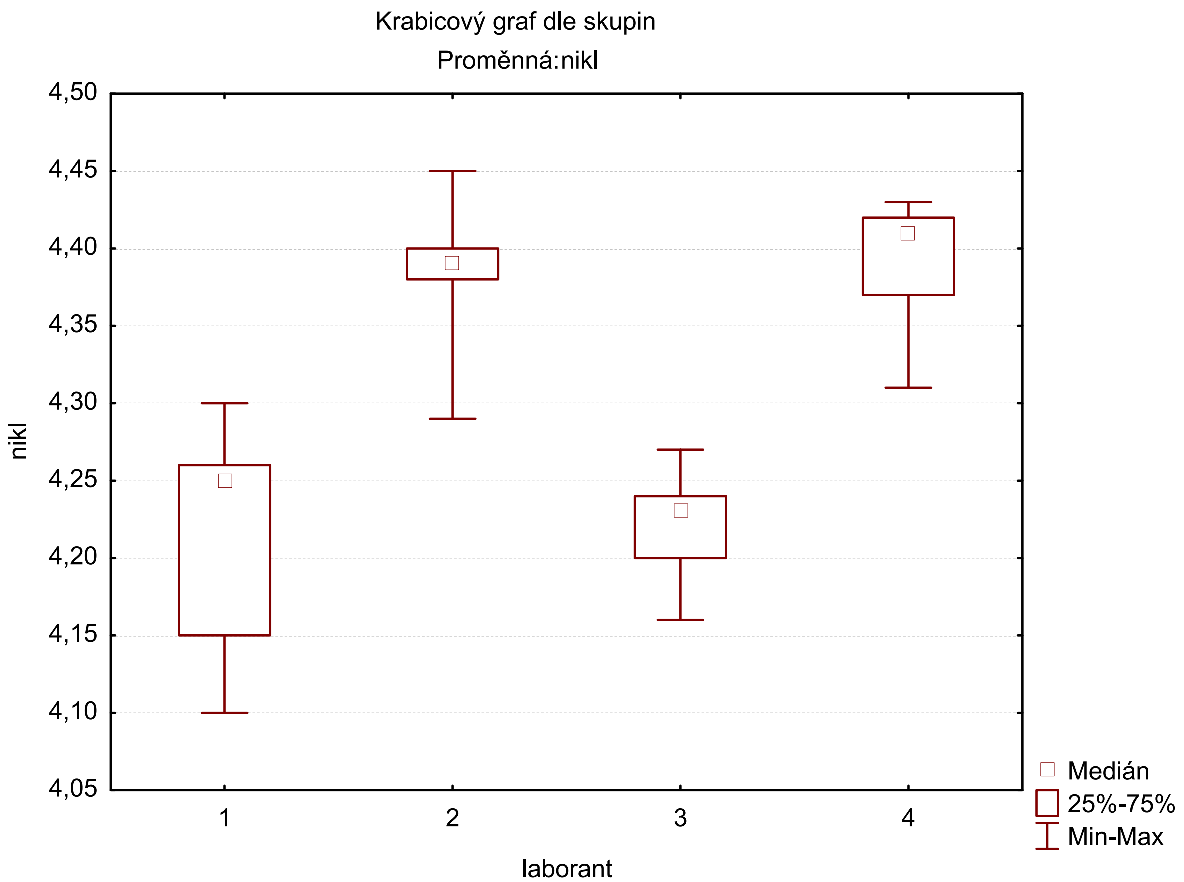
Závislá: nikl	Mediánový test, celk. medián = 4,29500; nikl (nikl v oceli Nezávislá (grupovací) proměnná : laborant Chi-Kvadr. = 13,60000 sv = 3 p = ,0035				
	1	2	3	4	Celkem
<= Medián: pozorov.	4,00000	1,00000	5,00000	0,00000	10,00000
očekáv.	2,50000	2,50000	2,50000	2,50000	
poz.-oč.	1,50000	-1,50000	2,50000	-2,50000	
> Medián: pozorov.	1,00000	4,00000	0,00000	5,00000	10,00000
očekáv.	2,50000	2,50000	2,50000	2,50000	
poz.-oč.	-1,50000	1,50000	-2,50000	2,50000	
Celkem: oček.	5,00000	5,00000	5,00000	5,00000	20,00000

Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách, ale K-W test je poněkud silnější (p-hodnota = 0,0032, zatímco p-hodnota pro mediánový test je 0,0035).
Nyní provedeme mnohonásobné porovnávání, abychom zjistili, které dvojice laborantů se liší. Zvolíme Vícenás. porovnání průměrného pořadí pro vš. skupiny.

Závislá: nikl	Vícenásobné porovnání p hodnot (oboustr.);nikl (nikl v oceli) Nezávislá (grupovací) proměnná :laborant Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =13,77714 p =,0032			
	1 R:5,8000	2 R:15,000	3 R:5,4000	4 R:15,800
1		0,083641	1,000000	0,045158
2	0,083641		0,061779	1,000000
3	1,000000	0,061779		0,032664
4	0,045158	1,000000	0,032664	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro porovnání dvojic skupin. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší laboranti A, D a laboranti C, D.

Grafické znázornění výsledků



Kritické hodnoty znaménkového testu pro $n = 6, 7, .., 20$, $\alpha = 0{,}05$ a $\alpha = 0{,}01$

n	$\alpha = 0{,}05$		$\alpha = 0{,}01$	
	k_1	k_2	k_1	k_2
6	0	6	-	-
7	0	7	-	-
8	0	8	0	8
9	1	8	0	9
10	1	9	0	10
11	1	10	0	11
12	2	10	1	11
13	2	11	1	12
14	2	12	1	13
15	3	12	2	13
16	3	13	2	14
17	4	13	2	15
18	4	14	3	15
19	4	15	3	16
20	5	15	3	17

Zdroj: Anděl, J.: Matematická statistika. (Tabulka XVIII.8).

Kritické hodnoty jednovýběrového Wilcoxonova testu pro n = 6, 7, .., 30, α = 0,05 a α = 0,01

n	α = 0,05	α = 0,01
	krit. hodnota	krit. hodnota
6	0	-
7	2	-
8	3	0
9	5	1
10	8	3
11	10	5
12	13	7
13	17	9
14	21	12
15	25	15
16	29	19
17	34	23
18	40	27
19	46	32
20	52	37
21	58	42
22	65	48
23	73	54
24	81	61
25	89	68
26	98	75
27	107	83
28	116	91
29	126	100
30	137	109

Zdroj: Anděl, J.: Matematická statistika. (Tabulka XVIII.9).

Kritické hodnoty Neményiho metody, r = 3, 4, .., 10, n = 1, 2, …, 25, α = 0,05

	r							
n	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,3	4,7	6,1	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
2	8,8	12,6	16,5	20,5	24,7	28,9	33,1	37,4
3	15,7	22,7	29,9	37,3	44,8	52,5	60,3	68,2
4	23,9	34,6	45,6	57,0	68,6	80,4	92,4	104,6
5	33,1	48,1	63,5	79,3	95,5	112,0	128,8	145,8
6	43,3	62,9	83,2	104,0	125,3	147,0	169,1	191,4
7	54,4	79,1	104,6	130,8	157,6	184,9	212,8	240,9
8	66,3	96,4	127,6	159,6	192,4	225,7	259,7	294,1
9	75,9	114,8	152,0	190,2	229,3	269,1	309,6	350,6
10	92,3	134,3	177,8	222,6	268,4	315,0	362,4	410,5
11	106,3	154,8	205,0	256,6	309,4	363,2	417,9	473,3
12	120,9	176,2	233,4	292,2	352,4	413,6	476,0	539,1
13	136,2	198,5	263,0	329,3	397,1	466,2	536,5	607,7
14	152,1	221,7	293,8	367,8	443,6	520,8	599,4	679,0
15	168,6	245,7	325,7	407,8	491,9	577,4	664,6	752,8
16	185,6	270,6	358,6	449,1	541,7	635,9	732,0	829,2
17	203,1	296,2	392,6	491,7	593,1	696,3	801,5	907,9
18	221,2	322,6	427,6	535,5	646,1	758,5	873,1	989,0
19	239,8	349,7	463,6	580,6	700,5	822,4	946,7	1072,4
20	258,8	377,6	500,5	626,9	756,4	888,1	1022,3	1158,1
21	278,4	406,1	538,4	674,4	813,7	955,4	1099,8	1245,9
22	298,4	435,3	577,2	723,0	872,3	1024,3	1179,1	1335,7
23	318,9	465,2	616,9	772,7	932,4	1094,8	1260,3	1427,7
24	339,8	495,8	657,4	823,5	993,7	1166,8	1343,2	1521,7
25	361,1	527,0	698,8	875,4	1056,3	1240,4	1427,9	1611,6

Zdroj: Blatná, Dagmar: Neparametrické metody. Tabulka T21/1.

Kritické hodnoty dvouvýběrového Wilcoxonova testu pro m = 1, 2, .., 30, n = 1, 2, …, 30, α = 0,05

	n																			
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-																			
2	-	-																		
3	-	-	-																	
4	-	-	-	0																
5	-	-	0	1	2															
6	-	-	1	2	3	5														
7	-	-	1	3	5	6	8													
8	-	0	2	4	6	8	10	13												
9	-	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	-	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	--	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	-	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	-	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	-	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	-	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					
16	-	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	-	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	-	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		
19	-	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	-	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	-	2	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	-	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	-	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	-	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	-	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	161
26	-	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	-	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	-	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	-	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	-	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200

Zdroj: Anděl, J.: Matematická statistika. (Tabulka XVIII.10a).