Základy matematiky — podzim 2008 — 1. termín — 19.1.2009

Jméno: ....

UČO: ....

test	Hodnocení					*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Množina všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$ je spočetná.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: f je injektivní a g je surjektivní $\implies$ $g \circ f$ je bijekce.

(c) **ano** — **ne** Pro každé uspořádání R množiny $\mathbb{N}$ existuje minimální nebo maximální prvek v $(\mathbb{N}, R)$.

(d) **ano** — **ne** Má-li podmožina X uspořádané množiny infimum, pak má i supremum.

(e) **ano** — **ne** Číslo 0 je neutrální prvek v grupoidu $(\mathbb{Z}, -)$.

(f) **ano** — **ne** Pokud binární relace R na množině A je reflexivní, pak R^{-1} je také reflexivní.

(g) **ano** — **ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny $(\mathbb{Z}, \leq)$ do sebe.

2. (7 bodů) Definujte formálně $\mathbb{Z}_n$ (množinu zbytkových tříd modulo n). Definujte operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_n$ a napište, co je třeba ukázat, aby tato definice byla korektní. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ grupa a pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ těleso.

3. (3krát 2 body) Politická strana má k dispozici 10 kandidátů – 5 mužů a 5 žen. Určete, kolika způsoby lze vytvořit kandidátní listinu (tj. pořadí kandidátů) tak, aby

(a) — (bez omezení);

(b) na prvních 3 místech byly ženy;

(c) se pravidelně střídali muži a ženy.

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) svazu, který nemá maximální prvek;

(b) nespočetného úplného svazu;

(c) konečné grupy, která není komutativní;

(d) relace ekvivalence R na množině $\mathbb{N}$, pro niž má rozklad $\mathbb{N}\backslash R$ právě 2 prvky;

(e) uspořádání na množině $\mathbb{Z}$, kde je nekonečně mnoho maximálních prvků, nekonečně mnoho minimálních prvků a každý maximální prvek je větší než libovolný minimální prvek.

5. (10 bodů) Buď n přirozené číslo, $n \geq 2$. Na množině $M = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$([a]_n, [b]_2) \circ ([c]_n, [d]_2) = ([a + (-1)^b c]_n, [b + d]_2), \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}\ .$$

Dokažte, že daný předpis korektně definuje operaci na množině M.

Určete, pro která n je $\circ$ asociativní operace.

Určete, pro která n existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Určete, pro která n je $(M, \circ)$ grupa.

Určete, pro která n je $(M, \circ)$ komutativní grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť M je konečná n-prvková množina, $n \geq 3$.
Určete, kolik je lineárních uspořádání množiny M.

Určete, kolik je uspořádání na množině M, kde existují právě 2 prvky, které jsou nesrovnatelné.

Určete, kolik je uspořádání na množině M, kde existují právě 3 minimální prvky, které jsou menší než všech zbývajících $n-3$ prvků, a kde je těchto $n-3$ zbývajících prvků uspořádáno lineárně.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Označme $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 200\}$. Pro $n \in M$ značíme $s(n)$ ciferný součet čísla $n \in M$, tj. pro $n = 100a + 10b + c$, kde $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, definujeme $s(n) = a + b + c$.
Na množině M definujme binární relaci ρ takto:

$$x \ \rho \ y \quad \iff \quad (20 \mid x - y \wedge s(x) = s(y)), \qquad \text{pro } x, y \in M.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M.

Popište rozklad $M \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Na množině $M = P(A) - \{\emptyset\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \iff (\ min(X) < min(Y) \ \vee \ (min(X) = min(Y) \wedge X \subseteq Y)\ ), \quad \text{pro } X, Y \in M.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny M.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$.

Je $(M, \preceq)$ svaz?

Je $(M, \preceq)$ úplný svaz?

Odpovědi zdůvodněte. (Pro $X \in M$, tj. X neprázdnou podmnožinu množiny A, značí $min(X)$ nejmenší přirozené číslo v $X \subseteq A$ vzhledem k velikosti.)

9. (10 bodů) Buď A libovolná množina a R relace na této množině. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujeme induktivně R^i takto: $R^1 = R$ a $R^{k+1} = R^k \circ R$ pro $k \in \mathbb{N}$. Ekvivalentně: pro $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R^i$ tehdy a jen tehdy, když existují prvky $a_0, a_1, \ldots, a_i \in A$ takové, že $a = a_0$, $b = a_i$ a platí $(a_{k-1}, a_k) \in R$ pro libovolné $k \in \{1, \ldots, i\}$. Položme nyní $R^\top = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^i$.
Dokažte, že $R^\top$ je tranzitivní relace.

Dokažte, že $R^\top$ je nejmenší tranzitivní relace obsahující R.
Tzn. ukažte, že pokud S je tranzitivní relace s vlastností $R \subseteq S$ potom $R^\top \subseteq S$.

Určete $R^\top$ v případě, kdy $A = \mathbb{Z}$ a $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.