Základy matematiky — podzim 2008 — 2. termín — 23.1.2009

Jméno:..........................

UČO: ....

test	Hodnocení					*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mezi množinami $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ existuje bijekce.

(b) **ano** — **ne** Maximální prvek uspořádané množiny je minimální prvek duálně uspořádané množiny.

(c) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je bijektivní $\implies$ f, g jsou bijektivní.

(d) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je antisymetrická právě tehdy, když $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$.

(e) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq A$ je uspořádaná množina $(B, \leq)$ také úplný svaz.

(f) **ano** — **ne** Prázdná množina $\emptyset$ je neutrální prvek monoidu $(P(A), \cap)$.

(g) **ano** — **ne** Zobrazení $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \to (\mathbb{R} - \{0\})$ dané předpisem $f(r) = -r$ je izomorfismus grupy $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A. Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad příslušný této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte projekci na faktorovou množinu příslušnou dané relaci ekvivalence.

3. (3krát 2 body) Student má k dispozici na výběr předměty dvou oborů: 5 informatických a 5 matematických. Určete, kolika způsoby si může student vybrat k zápisu 4 předměty tak, aby

(a) — (bez omezení);

(b) dva předměty byly informatické a dva matematické;

(c) všechny předměty byly z jednoho oboru.

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) nespočetné množiny a relace ekvivalence na ní, takové, že příslušný rozklad je spočetný;

(b) konečného tělesa;

(c) svazu, který není úplný svaz;

(d) relací $\rho \neq \sigma$ na množině $M = \{a, b\}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$;

(e) uspořádání pětiprvkové množiny, kde 2 prvky jsou maximální, 3 prvky jsou minimální a každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.

5. (10 bodů) Buď $(G, \cdot)$ grupa a $g \in G$ pevně zvolený prvek. Definujeme binární operaci $\circ$ na množině G vztahem

$$a \circ b = a \cdot g \cdot b, \qquad \text{pro } a, b \in G.$$

Rozhodněte, zda je $\circ$ asociativní operace.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(G, \circ)$ grupa.

Rozhodněte, zda je $(G, \circ)$ komutativní grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ označujeme $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Určete, kolik je izotonních zobrazení z $(X_2, \leq)$ do $(P(X_n), \subseteq)$.

Určete, kolik z nich je injektivních.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Buď na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definována relace ρ takto:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad (2 \mid a - c\ \wedge\ 5 \mid b - d), \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Popište rozklad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = P(\mathbb{N})$ definujeme binární relaci $\leq$ takto:

$$X \leq Y \iff (X \subseteq Y \wedge Y - X \text{ konečná }), \quad \text{pro } X, Y \in M.$$

Dokažte, že $\leq$ je uspořádání množiny M.

Nalezněte všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny $(M, \leq)$.

Je $(M, \leq)$ svaz?

Je $(M, \leq)$ úplný svaz?

Uvažujme zobrazení $id : M \to M$ dané předpisem $id(X) = X$.
Rozhodněte, zda $id : (M, \leq) \to (M, \subseteq)$ je izotonní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď A libovolná množina a R relace na této množině. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujeme induktivně R^i takto: $R^1 = R$ a $R^{k+1} = R^k \circ R$ pro $k \in \mathbb{N}$. Ekvivalentně: pro $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R^i$ tehdy a jen tehdy, když existují prvky $a_0, a_1, \ldots, a_i \in A$ takové, že $a = a_0$, $b = a_i$ a platí $(a_{k-1}, a_k) \in R$ pro libovolné $k \in \{1, \ldots, i\}$. Označme $Rel(A)$ množinu všech relací na množině A a $Ref(A)$ množinu všech reflexivních relací na množině A, tj. $Ref(A) \subseteq Rel(A)$, přičemž obě množiny $Ref(A)$ i $Rel(A)$ jsou uspořádány inkluzí. Uvažujme zobrazení $\varphi : Rel(A) \times \mathbb{N} \to Rel(A)$ dané předpisem $\varphi((R, n)) = R^n$ pro $R \in Rel(A)$, $n \in \mathbb{N}$.
Rozhodněte, zda je φ izotonní zobrazení z $(Rel(A), \subseteq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ do $(Rel(A), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda je φ izotonní zobrazení z $(Rel(A), \subseteq) \times (\mathbb{N}, =)$ do $(Rel(A), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda je φ izotonní zobrazení z $(Ref(A), \subseteq) \times (\mathbb{N}, \leq)$ do $(Rel(A), \subseteq)$.

Rozhodněte, zda je φ izotonní zobrazení z $(Ref(A), \subseteq) \times (\mathbb{N}, =)$ do $(Rel(A), \subseteq)$.

Odpovědi zdůvodněte.
(Součin uspořádaných množin $(K, \leq) \times (L, \leq)$ je množina $K \times L$ s uspořádáním $\leq$ daným předpisem $(k, l) \leq (k', l') \iff k \leq k' \wedge l \leq l'$, pro $k, k' \in K$ a $l, l' \in L$.)