Základy matematiky — podzim 2008 — 1. opravný termín — 29.1.2009

Jméno:...........................

UČO: ....

test	Hodnocení					cel.suma		zn.
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Existuje množina A taková, že existuje bijekce z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolnou bijekci $f : A \to B$ existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $g \circ f = id_A$.

(c) **ano** — **ne** Každá uspořádaná množina obsahuje pouze konečně mnoho maximálních prvků

(d) **ano** — **ne** Je-li $f : A \to B$ izomorfismus uspořádaných množin $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$, pak platí: $(A, \leq)$ je úplný svaz $\implies$ $(B, \leq)$ je úplný svaz.

(e) **ano** — **ne** Okruh $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 4 je těleso.

(f) **ano** — **ne** Prázdná relace, tj. $\emptyset$, je symetrická relace na libovolné množině.

(g) **ano** — **ne** Množina všech relací na množině $\mathbb{N}$, která jsou zobrazení, uspořádaná inkluzí, tvoří úplný svaz.

2. (7 bodů) Definujte pojmy uspořádané množiny a úplného svazu. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Při písemce rozesazujeme 16 studentů do 4 řad a 4 sloupců, přičemž studenti v prvním a třetím sloupci píší skupinu A a studenti v druhém a čtvrtém sloupci píší skupinu B. Určete, kolika způsoby lze studenty rozesadit, pokud nám záleží

(a) kdo kde sedí;

(b) kdo sedí ve které řadě;

(c) kdo bude psát jakou skupinu.

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) konečné uspořádané množiny $(A, \leq)$ a její podmnožiny $B \subseteq A$ takové, že $(A, \leq)$ je svaz a $(B, \leq)$ není svaz;

(b) binární operace na množině $\{a, b\}$, pro kterou neexistuje neutrální prvek;

(c) relací ρ a π na množině $\mathbb{N}$ takových, že $\rho \circ \pi = \rho$ a $\pi \circ \rho = \pi$;

(d) uspořádání na množině $\mathbb{R}$, kde je nekonečně mnoho minimálních prvků a žádný maximální prvek;

(e) izotonního surjektivního zobrazení z $(\mathbb{Z}, \leq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$.

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$([a]_{10}, [b]_2) \circ ([c]_{10}, [d]_2) = ([a + (-1)^b c]_{10}, [b + d]_2), \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ .$$

Víme, že $(M, \circ)$ je grupa. (Nedokazujte!)
Rozhodněte, zda předpis $\alpha(([a]_{10}, [b]_2)) = [a]_{10}$, pro $a, b \in \mathbb{Z}$, zadává homomorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Rozhodněte, zda předpis $\beta(([a]_{10}, [b]_2)) = [b]_2$, pro $a, b \in \mathbb{Z}$, zadává homomorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Rozhodněte, zda předpis $\gamma(([a]_{10}, [b]_2)) = [a + b]_{10}$, pro $a, b \in \mathbb{Z}$, zadává homomorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Rozhodněte, zda předpis $\delta(([a]_{10}, [b]_2)) = [a + b]_2$, pro $a, b \in \mathbb{Z}$, zadává homomorfismus z grupy $(M, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Odpovědi zdůvodněte. (Nezapomeňte na korektnost předpisu.)

6. (10 bodů) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ označujeme $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Určete, kolik je izotonních zobrazení z $(X_3, \leq)$ do $(P(X_n), \subseteq)$.

Určete, kolik z nich je injektivních.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Označme $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 1000\}$ a na množině M definujme binární relaci ρ takto:

$$x \,\rho\, y \quad \Longleftrightarrow \quad \left(11 \mid x - y \;\wedge\; \left[\frac{x}{100}\right] = \left[\frac{y}{100}\right]\right), \qquad \text{pro } x, y \in M.$$

kde $[n]$ značí celou část racionálního čísla $n \in \mathbb{Q}$, tj. největší celé číslo menší nebo rovno n. Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině M.

Popište rozklad $M \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Q}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$x \preceq y \iff (x = y \vee x^2 < y^2), \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny $\mathbb{Q}$.

Nalezněte všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \preceq)$.

Je $(\mathbb{Q}, \preceq)$ svaz?

Je $(\mathbb{Q}, \preceq)$ úplný svaz?

Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ dané předpisem $f(x) = 0$ pro $x < 100$ a $f(x) = 1$ pro $x \geq 100$. Rozhodněte, zda $f : (\mathbb{Q}, \preceq) \to (Z, \leq)$ je izotonní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď A libovolná konečná množina a R relace na této množině. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujeme induktivně R^i takto: $R^1 = R$ a $R^{k+1} = R^k \circ R$ pro $k \in \mathbb{N}$. Ekvivalentně: pro $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R^i$ tehdy a jen tehdy, když existují prvky $a_0, a_1, \ldots, a_i \in A$ takové, že $a = a_0$, $b = a_i$ a platí $(a_{k-1}, a_k) \in R$ pro libovolné $k \in \{1, \ldots, i\}$.
Dokažte, že pokud R je reflexivní relace a množina A má právě n prvků, potom $R^n = R^{n-1}$.

Pro množinu $A = \{1, \ldots, n\}$ dejte příklad relace R na této množině takové, že $R^n \neq R^{n-1}$.

Pro množinu $A = \{1, \ldots, n\}$ dejte příklad reflexivní relace R na této množině, takové, že $R^i \neq R^{i-1}$ pro $i = \{2, \ldots, n-1\}$.

Odpovědi zdůvodněte.