Základy matematiky — podzim 2008 — 2. opravný termín — 3.2.2009

Jméno:...........................

UČO: ....

test	Hodnocení					*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** Existuje bijekce z množiny $\mathbb{Q}$ do množiny $\mathbb{N}$.

(b) **ano — ne** Je-li $g : A \to B$ surjektivní zobrazení a $f : B \to C$ je také surjektivní zobrazení, pak $f \circ g : A \to C$ je opět surjektivní zobrazení.

(c) **ano — ne** Uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$ jsou izomorfní.

(d) **ano — ne** Každý svaz má nejmenší prvek.

(e) **ano — ne** Každá konečná uspořádaná množina má alespoň jeden minimální prvek.

(f) **ano — ne** Pokud je binární relace R na množině A tranzitivní, pak R^{-1} je také tranzitivní.

(g) **ano — ne** V monoidu $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ má každý prvek inverzi.

2. (7 bodů) Definujte pojem grupa, komutativní grupa a izomorfismus grup. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Každá z pěti politických stran nominovala 4 zástupce na společnou kandidátku. Určete, kolika způsoby lze na kandidátce z těchto 20 osob vybrat 3 tak, že

(a) — (bez omezení);

(b) jsou všichni z jedné strany;

(c) jsou aspoň ze dvou stran.

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) monoidu, který není grupa a jeho podmnožiny, která tvoří grupu (se stejnou operací);

(b) konečné množiny $\mathcal{A}$ takové, že $\bigcap \mathcal{A}$ je nekonečná množina;

(c) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{N}$ tak, aby rozklad $\mathbb{N}\backslash\rho$ měl nekonečně mnoho tříd;

(d) izotonního zobrazení $f : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \leq)$, které není injektivní (zde $\leq$ je uspořádaní podle velikosti);

(e) uspořádané množiny, která má jeden maximální prvek a nemá minimální prvek.

5. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$x \circ y = x + y + 7, \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že $\circ$ je asociativní operace.

Dokažte, že pro operaci $\circ$ existuje neutrální prvek.

Dokažte, že $(\mathbb{Z}, \circ)$ je grupa.

Naleznĕte zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tak, že φ je izomorfismus z grupy $(\mathbb{Z}, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ označujeme $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$.
Určete, kolik je zobrazení z $P(X_2)$ do $P(X_n)$.

Určete, kolik je izotonních zobrazení z $(P(X_2), \subseteq)$ do $(P(X_n), \subseteq)$.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Buď na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definována relace ρ takto:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \Longleftrightarrow a^2 - c^2 = b^2 - d^2 = 0, \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Popište rozklad $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $M = P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \iff (X = Y \vee min(X) < min(Y)), \quad \text{pro } X, Y \in M.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny M.

Nalezněte všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$.

Je $(M, \preceq)$ svaz?

Je $(M, \preceq)$ úplný svaz?

Uvažujme zobrazení $id : M \to M$ dané předpisem $id(X) = X$.
Rozhodněte, zda $id : (M, \subseteq) \to (M, \preceq)$ je izotonní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte. (Pro $X \in M$, tj. X neprázdnou podmnožinu množiny A, značí $min(X)$ nejmenší přirozené číslo v $X \subseteq A$ vzhledem k velikosti.)

9. (10 bodů) Buď A libovolná množina a R relace na této množině. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujeme induktivně R^i takto: $R^1 = R$ a $R^{k+1} = R^k \circ R$ pro $k \in \mathbb{N}$. Ekvivalentně: pro $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R^i$ tehdy a jen tehdy, když existují prvky $a_0, a_1, \ldots, a_i \in A$ takové, že $a = a_0$, $b = a_i$ a platí $(a_{k-1}, a_k) \in R$ pro libovolné $k \in \{1, \ldots, i\}$. Položme nyní $R^\perp = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} R^i$.
Rozhodněte zda platí následující implikace:
R reflexivní $\implies$ $R^\perp$ reflexivní;

$R^\perp$ reflexivní $\implies$ R reflexivní;

R symetrická $\implies$ $R^\perp$ symetrická;

$R^\perp$ symetrická $\implies$ R symetrická;

R tranzitivní $\implies$ $R^\perp$ tranzitivní;

$R^\perp$ tranzitivní $\implies$ R tranzitivní.

Odpovědi zdůvodněte.