Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 7. 11. 2008

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano — ne** $\{\emptyset\} - (\{\emptyset\} - \{\emptyset\}) = (\{\emptyset\} - \{\emptyset\}) - \{\emptyset\}$,

(b) **ano — ne** $A \times \emptyset = \emptyset \times A$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ano — ne** $\emptyset^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset\}^{\emptyset}$,

(d) **ano — ne** $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech přirozených sudých čísel $S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \; \rho \; b \iff 4 \mid a + b$			
$a \; \rho \; b \iff a \geq 10 \land ab \geq 100$			
$a \; \rho \; b \iff 2^a < 3^b$			
$a \; \rho \; b \iff 4 \nmid a^2 + b^2$			
$a \; \rho \; b \iff \lvert a - b \rvert \geq 3$			

3. (2 body) Určete, pro které množiny a a b má množina $\{a, b\} \times \{\emptyset, \{a\}, b\}$ právě 2 prvky.

Určete, pro které množiny a a b má množina $\{a, b\} \times \{\emptyset, \{a\}, b\}$ právě 3 prvky.

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$A \subseteq B \ \wedge \ C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad (B - C) \cup (D - A) = (B \cup D) - (A \cap C).$$

5. (4 body) Buď $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \ a^2 = b^2 \ \}$ relace na množině $\mathbb{Z}$.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) relaci $f \subseteq R$ na množině $\mathbb{Z}$, která je zobrazení a není reflexivní relace;

(b) relaci g na množině $\mathbb{Z}$, která je zobrazení a pro niž $g \circ R$ není tranzitivní relace;

(c) relaci S na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $S \circ S \neq S$ a $(S \circ S) \circ S = S$;

(d) relaci U na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $U \cap R = \emptyset$ a pro niž relace $U \circ R$ je zobrazení.

6. (3 body) Rozhodněte, zda pro libovolné dvě množiny A, B platí

$$\mathcal{P}(A \div B) \subseteq \mathcal{P}(A) \div \mathcal{P}(B).$$

Rozhodněte, zda pro libovolné dvě množiny A, B platí

$$\mathcal{P}(A) \div \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \div B).$$

Odpovědi zdůvodněte! (Připomeňme, že pro libovolné dvě množiny X, Y platí $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.)

7. (2 body) Buď $\alpha : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zobrazení definované takto:
pro libovolné zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ klademe $\alpha(f) = f \circ f$.
Rozhodněte, zda α je injektivní zobrazení.

Rozhodněte, zda α je surjektivní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte!