MB101 – Matematika I
PRVNÍ TEST
Sem. sk. 01, 8. 10. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Příklad 1 (2 body). Máme k dispozici 5 lůžkových, 5 jídelních a 36 osobních vagónů. Kolik různých souprav o 5 vagónech lze sestavit, jestliže
(a) přihlížíme k pořadí vagónů;
(b) nezohledňujeme pořadí vagónů?

Výsledek. Snadno lze získat
(a) $V(3,5) = 3^5 = 243$;
(b) $C(3,5) = \binom{7}{2} = 21$.

$\square$

Příklad 2 (1 bod). V urně je 7 bílých, 7 žlutých a 6 modrých koulí. Vylosujeme (bez vracení) 3 koule. Určete pravděpodobnost, že jsou právě 2 bílé.

Výsledek. Výsledek je

$$\frac{\binom{7}{2}\binom{13}{1}}{\binom{7+7+6}{3}}.$$

$\square$

Příklad 3 (2 body). V první přepravce je 20 a ve druhé 25 lahví bílého vína. Na lahvích nejsou etikety. V každé z přepravek je 12 lahví tramínu. Nejdříve náhodně vybereme jednu z přepravek a z ní pak vybereme 2 lahve. Nalezněte pravděpodobnost, že v obou vybraných lahvích bude tramín.

Výsledek. Věta o celkové pravděpodobnosti (formule úplné pravděpodobnosti) a věta o násobení pravděpodobností dávají

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}.$$

$\square$

Příklad 4 (2 body). Napište definici nezávislosti dvou náhodných jevů.
Hodíme 2 kostkami. Určete podmíněnou pravděpodobnost, že na první kostce padla pětka za podmínky, že padl součet 9. *Na základě tohoto výsledku* rozhodněte o (ne)závislosti jevů „na první kostce padla pětka“ a „padl součet 9“.

Výsledek. Daná podmíněná pravděpodobnost činí $1/4$. Protože pravděpodobnost jevu „na první kostce padla pětka“ je $1/6 \neq 1/4$, nejsou uvedené jevy nezávislé. □

Příklad 5 (1 bod). Test se skládá z 10 otázek. U každé se má vybrat 1 ze 3 variant odpovědi (právě 1 je správná). Jaká je pravděpodobnost, že aspoň polovina otázek byla zodpovězena správně, pokud bylo všech 10 odpovědí vybráno náhodně? Výsledek nevyčíslujte!

Výsledek. Dosazením do Bernoulliova vzorce (z binomického rozdělení) obdržíme

$$1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}.$$

□

Příklad 6 (2 body). Nechť je zcela náhodně rozlomena tyč na tři části. Stanovte pravděpodobnost, že délka druhé (prostřední) části bude větší než dvě třetiny délky tyče před jejím rozlomením.

Výsledek. Jedná se o příklad na geometrickou pravděpodobnost s výsledkem $1/9$. □

Příklad 7 (1 bod). Určením determinantu dvojrozměrné matice spočtěte obsah každého rovnoběžníku s vrcholy v bodech $[5, 5]$, $[6, 8]$ a $[6, 9]$.

Výsledek. Obsah je 1. □

Příklad 8 (2 body). Uveďte definice injektivního zobrazení a surjektivního zobrazení $f : A \to B$ ($D_f = A$) pro libovolné množiny $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Poté udejte příklad zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($D_g = \mathbb{N}$), které je injektivní a není surjektivní, a zobrazení $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($D_h = \mathbb{N}$), které je surjektivní a není injektivní.

Výsledek. Hledanými funkcemi jsou např.

$$g(n) = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad h(2n-1) = n, \; h(2n) = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Příklad 9 (2 body). Kdy řekneme o relaci na množině X, že je symetrická, a kdy, že je antisymetrická? Zjistěte, zda je relace

$$R = \{[n, m] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |\, n \,| \geq |\, m \,|\}$$

na množině $\mathbb{Z}$ ekvivalencí, resp. uspořádáním.

Výsledek. Relace R nemůže být ekvivalencí: není symetrická; nemůže být uspořádáním: není antisymetrická. □