MB101 – Matematika I
DRUHÝ TEST

Sem. sk. 01, 29. 10. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Příklad 1 (3 body). Pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody vyjádřete vektor $(5, 1, 11)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 1, 3)$ (tj. nalezněte $p, q, r \in \mathbb{R}$, pro která $(5, 1, 11) = p(3, 2, 2) + q(2, 3, 1) + r(1, 1, 3)$).

Výsledek. Úloha má jediné řešení

$$p = 2, \qquad q = -2, \qquad r = 3,$$

tj. platí

$$(5, 1, 11) = 2 \cdot (3, 2, 2) - 2 \cdot (2, 3, 1) + 3 \cdot (1, 1, 3).$$

□

Příklad 2 (1 bod). Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

Výsledek. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \qquad a = c = 1, \qquad b = c = 1.$$

□

Příklad 3 (3 body). Nechť je dána reálná čtvercová matice B alespoň druhého řádu. Uveďte 3 různé podmínky, které jsou ekvivalentní její regulárnosti (tj. 3 podmínky, které jsou nutné a postačují k tomu, aby byla B regulární).

Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, určete tuto matici C^{-1}.

Výsledek první části – např. Matice B je regulární, právě když hodnost matice $(B^T)^{26}$ je rovna jejímu rozměru, to nastane právě tehdy, když systém $B^T x = \lambda x$ má více než 3 řešení pouze pro $\lambda \neq 0$ (a to pro konečně mnoho $\lambda \in \mathbb{R}$), což je ekvivalentní s tím, že maticová rovnice $BX = -2B^T$ má právě 1 řešení.

Výsledek druhé části. Je

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 4 (3 body). Napište definici hodnosti $h(D)$ (obecné) matice D typu $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ a Frobeniovu větu. Poté stanovte hodnost matice $D \cdot D^T$ a počet řešení 2 soustav 5 lineárních rovnic $D^T \cdot x = (1, 2, 3, 4, 0)^T$, $D^T \cdot x = (1, 1, 1, 1, 0)^T$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ a

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. Hodnost matice

$$D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 84 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

je očividně 3. Systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & & + & x_3 & = & 2, \\ 7x_1 & & + & 4x_3 & = & 3, \\ 5x_1 & & + & 3x_3 & = & 4, \\ & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

potom nemá řešení, zatímco systém

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & & + & x_3 & = & 1, \\ 7x_1 & & + & 4x_3 & = & 1, \\ 5x_1 & & + & 3x_3 & = & 1, \\ & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

má právě 1 řešení, a to $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. □

Příklad 5 (2 body). Vyčíslete determinanty $|E|$, $|E^{-1}|$, $|E^T|$, $|E^2|$, $|E \cdot E^T|$, $|E^T \cdot E^{-1}|$, $|E^{-1} \cdot E^T|$, $|E^{-3} \cdot E^T \cdot E|$ (pokud existují), jestliže je

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. Ihned můžeme napsat výsledky

$$|E| = |E^T| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 1 = -36, \qquad |E^2| = |E \cdot E^T| = |E| \cdot |E^T| = (-36)^2 = 1296,$$

$$|E^T \cdot E^{-1}| = |E^{-1} \cdot E^T| = 1, \qquad |E^{-1}| = |E^{-3} \cdot E^T \cdot E| = -\frac{1}{36},$$

které vyplývají ze známých vzorců

$$|\,A\,| = |\,A^T\,|, \qquad |\,A\cdot B\,| = |\,A\,|\cdot|\,B\,|, \qquad |\,A^{-1}\,| = |\,A\,|^{-1}$$

a ze skutečnosti, že matice E je „dolní trojúhelníková“. $\square$

Příklad 6 (2 body). Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů $(1,2,3,1)$, $(1,0,-1,1)$, $(2,1,-1,3)$ a $(0,0,3,2)$.

Výsledek. Neboť

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. $\square$

Příklad 7 (1 bod). Najděte adjungovanou matici F^*, když

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}.$$

Výsledek. Ze znalosti inverzní matice F^{-1} dostáváme

$$F^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)\,F^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta & 0 \\ -\gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\delta-\beta\gamma \end{pmatrix} \quad \text{pro libovolná } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}.$$

$\square$