MB101 – Matematika I
DRUHÝ TEST
Sem. sk. 01, 29. 10. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Příklad 1 (3 body). Pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody vyjádřete vektor $(5,1,11)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,2,2)$, $(2,3,1)$, $(1,1,3)$ (tj. nalezněte $p,q,r \in \mathbb{R}$, pro která $(5,1,11) = p(3,2,2) + q(2,3,1) + r(1,1,3)$).

Příklad 2 (1 bod). Pro jaké hodnoty parametrů $a,b,c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1,1,a,1)$, $(1,b,1,1)$, $(c,1,1,1)$ lineárně závislé?

Příklad 3 (3 body). Nechť je dána reálná čtvercová matice B alespoň druhého řádu. Uveďte 3 různé podmínky, které jsou ekvivalentní její regulárnosti (tj. 3 podmínky, které jsou nutné a postačují k tomu, aby byla B regulární).

Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, určete tuto matici C^{-1}.

Příklad 4 (3 body). Napište definici hodnosti $h(D)$ (obecné) matice D typu $m \times n$ $(m,n \in \mathbb{N})$ a Frobeniovu větu. Poté stanovte hodnost matice $D \cdot D^T$ a počet řešení 2 soustav 5 lineárních rovnic $D^T \cdot x = (1,2,3,4,0)^T$, $D^T \cdot x = (1,1,1,1,0)^T$, kde $x = (x_1,x_2,x_3)^T$ a

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5 (2 body). Vyčíslete determinanty $|\,E\,|$, $|\,E^{-1}\,|$, $|\,E^T\,|$, $|\,E^2\,|$, $|\,E \cdot E^T\,|$, $|\,E^T \cdot E^{-1}\,|$, $|\,E^{-1} \cdot E^T\,|$, $|\,E^{-3} \cdot E^T \cdot E\,|$ (pokud existují), jestliže je

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6 (2 body). Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů $(1,2,3,1)$, $(1,0,-1,1)$, $(2,1,-1,3)$ a $(0,0,3,2)$.

Příklad 7 (1 bod). Najděte adjungovanou matici F^*, když

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}.$$