MB101 – Matematika I
TŘETÍ TEST

Sem. sk. 01, 19. 11. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Příklad 1 (3 body). Napište axiomy vektorového prostoru V (tj. podmínky, jejichž splnění znamená, že množina V s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ je vektorovým prostorem).

Poté zjistěte, zda je množina

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3;\ |\, x_1 \,| = |\, x_2 \,| = |\, x_3 \,|\}$$

podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a množina

$$U_2 := \{ax^2 + c;\ a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem $\mathcal{P}_2$ (tedy prostoru polynomů stupně nejvýše 2).

Výsledek. Množina U_1 není vektorovým (pod)prostorem (to plyne např. ze součtu vektorů $(1,1,1)^T$, $(-1,1,1)^T$), množina U_2 ovšem ano. $\square$

Příklad 2 (1 bod). Utvářejí matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$?

Výsledek. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \neq 0,$$

uvedené matice – vektory (v libovolném pořadí) – zadávají bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$. $\square$

Příklad 3 (2 body). Nechť jsou dány podprostory

$$\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete dimenzi a bázi průniku těchto podprostorů. (Nápověda otázkou: Znáte báze těchto podprostorů?)

Výsledek. Hledaný podprostor je množina všech skalárních násobků vektoru $(3,5,1)^T$ (jedná se o přímku procházející počátkem s tímto směrovým vektorem). Je tudíž jednodimenzionální. $\square$

Příklad 4 (3 body). Najděte matici lineární transformace L prostoru $\mathbb{R}^3$ ve standardní bázi $\underline{e} = ((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$, pokud je

$$L\left((2,3,5)^T\right) = (1,1,1)^T, \quad L\left((0,1,2)^T\right) = (1,1,-1)^T, \quad L\left((1,0,0)^T\right) = (2,1,2)^T.$$

Výsledek. Neboť víme, že zobrazení L odpovídá v bázích $\underline{e}$ (báze tzv. cílového prostoru), $\underline{u} = ((2,3,5)^T, (0,1,2)^T, (1,0,0)^T)$ matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

lineární transformace L je reprezentována v bázi $\underline{e}$ maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

□

Příklad 5 (1 bod). V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ definujte pojmy „délka vektoru" a „úhel" (mezi 2 nenulovými vektory) a spočtěte délku vektorů $u = (2,2,0,1)^T$, $v = (2,-2,1,0)^T$ a úhel mezi nimi.

Výsledek. Snadno lze vypočíst, že

$$||\, u \,|| = ||\, v \,|| = 3, \qquad u \perp v.$$

□

Příklad 6 (3 body). V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ určete ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru W, jestliže

(a) $W = \{(r+s+t, -r+t, r+s, -t, s+t)^T;\ r,s,t \in \mathbb{R}\}$;

(b) W je množina řešení soustavy rovnic $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$.

Výsledek. Platí

(a) $W^\perp = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$;

(b) $W^\perp = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

□

Příklad 7 (2 body). Stanovte $R(A)$, $R\left(A^T\right)$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^T$, dim $R(A)$, dim $R\left(A^T\right)$, dim $\operatorname{Im} A$, dim $\operatorname{Im} A^T$, dim $\operatorname{Ker} A$ a dim $\operatorname{Ker} A^T$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. Správné odpovědi jsou dim $R(A)$ = dim $R\left(A^T\right)$ = dim $\operatorname{Im} A$ = dim $\operatorname{Im} A^T = 3$, dim $\operatorname{Ker} A = 2$, dim $\operatorname{Ker} A^T = 1$,

$$R(A) = \operatorname{Span}\langle (1,2,0,4,5), (2,0,0,2,3), (0,0,0,1,1) \rangle,$$
$$R\left(A^T\right) = \operatorname{Span}\langle (1,2,0,-1), (2,0,0,2), (4,2,1,0) \rangle$$

a $\operatorname{Im} A = R\left(A^T\right)$, $\operatorname{Im} A^T = R(A)$ při ztotožnění řádkových a sloupcových vektorů. □