# MB101 – Matematika I
# TŘETÍ TEST
**Sem. sk. 01, 19. 11. 2008**

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

**Příklad 1 (3 body).** Napište axiomy vektorového prostoru $V$ (tj. podmínky, jejichž splnění znamená, že množina $V$ s operacemi $+ : V \times V \to V$ a $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ je vektorovým prostorem).

Poté zjistěte, zda je množina

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3;\ |\,x_1\,| = |\,x_2\,| = |\,x_3\,|\}$$

podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a množina

$$U_2 := \{ax^2 + c;\ a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem $\mathcal{P}_2$ (tedy prostoru polynomů stupně nejvýše 2).

**Příklad 2 (1 bod).** Utvářejí matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ bázi prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$?

**Příklad 3 (2 body).** Nechť jsou dány podprostory

$$\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete dimenzi a bázi průniku těchto podprostorů. (Nápověda otázkou: Znáte báze těchto podprostorů?)

**Příklad 4 (3 body).** Najděte matici lineární transformace $L$ prostoru $\mathbb{R}^3$ ve standardní bázi $\underline{e} = ((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$, pokud je

$$L\left((2,3,5)^T\right) = (1,1,1)^T, \quad L\left((0,1,2)^T\right) = (1,1,-1)^T, \quad L\left((1,0,0)^T\right) = (2,1,2)^T.$$

**Příklad 5 (1 bod).** V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ definujte pojmy „délka vektoru“ a „úhel“ (mezi 2 nenulovými vektory) a spočtěte délku vektorů $u = (2,2,0,1)^T$, $v = (2,-2,1,0)^T$ a úhel mezi nimi.

**Příklad 6 (3 body).** V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ určete ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru $W$, jestliže

(a) $W = \{(r+s+t, -r+t, r+s, -t, s+t)^T;\ r, s, t \in \mathbb{R}\}$;

(b) $W$ je množina řešení soustavy rovnic $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$.

**Příklad 7 (2 body).** Stanovte $R(A)$, $R\left(A^T\right)$, $\mathrm{Im}\,A$, $\mathrm{Im}\,A^T$, $\dim R(A)$, $\dim R\left(A^T\right)$, $\dim \mathrm{Im}\,A$, $\dim \mathrm{Im}\,A^T$, $\dim \mathrm{Ker}\,A$ a $\dim \mathrm{Ker}\,A^T$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$