MB101 – Matematika I
ČTVRTÝ TEST
Sem. sk. 01, 10. 12. 2008

Zadání si ponecháváte. Všechny listy, které budete odevzdávat, *čitelně* podepište. Zároveň uveďte také svoje UČO.

Příklad 1 (2 body). Nechť je dán vektorový prostor $(V, +, \cdot)$. Napište definici skalárního součinu na V. Pro $V = \mathcal{P}_2$ (tedy ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše 2) zaveďte libovolný skalární součin a v tomto prostoru se skalárním součinem vypočtěte úhel mezi vektory x a x^2.

Výsledek. Zvolíme-li např. „standardní" skalární součin, tj. přiřadíme-li každým dvěma polynomům stupně nejvýše 2

$$a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad b_2x^2 + b_1x + b_0$$

reálné číslo

$$a_2\,b_2 + a_1\,b_1 + a_0\,b_0,$$

budou na sebe vektory x a x^2 kolmé. □

Příklad 2 (2 body). Body $[0, 1]$, $[1, 1]$, $[2, 3]$, $[5, 5]$ proložte regresní přímku.

Výsledek. Hledaná přímka je $6x/7 + 11/14$. □

Příklad 3 (2 body). V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost v a odchylku φ vektoru $(2, 1, 2, 3)^T$ od podprostoru

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4;\ x_4 = 0\right\}.$$

Výsledek. Platí

$$v = 3, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Uvažme, že projekce zadaného vektoru do (na) W je zjevně $(2, 1, 2, 0)^T$. □

Příklad 4 (2 body). Sestrojte ortogonální bázi podprostoru

$$\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$.

Výsledek. Ortogonálních bází je nekonečně mnoho. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem lze obdržet např.

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

□

Příklad 5 (3 body). Definujte pojmy „vlastní hodnota“ a „vlastní vektor příslušející této vlastní hodnotě“ pro obecnou (blíže neupřesněnou) reálnou čtvercovou matici A a poté najděte charakteristický polynom $p(\lambda)$, vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Výsledek. Neboť je

$$p(\lambda) = -(\lambda+1)\,(\lambda-1)^2,$$

vlastními hodnotami jsou čísla 1 a -1. Očividně

$$\operatorname{Eigen}(-1) = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Eigen}(1) = \operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

□

Příklad 6 (1 bod). Ze znalosti stopy a vlastních hodnot $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ matice

$$\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&5&-4\\6&4&-4\end{pmatrix}$$

získejte její zbývající vlastní hodnotu λ_3.

Výsledek. Identita $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 + 5 - 4 = 6$ dává

$$\lambda_3 = 3.$$

□

Příklad 7 (3 body). Lze vyjádřit matici

$$B = \begin{pmatrix}5&6\\6&5\end{pmatrix}$$

ve tvaru součinu $B = P^{-1} \cdot D \cdot P$ pro nějakou diagonální matici D a regulární matici P? Pokud je to možné, uveďte příklad takové dvojice matic D, P a zjistěte, zda takových dvojic existuje více než 5.

Výsledek. Matice B má dvě různé vlastní hodnoty, a proto takové vyjádření existuje. Např. platí

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matice B je podobná právě dvěma diagonálním maticím, a to

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix},$$

ovšem sloupce matice P^{-1} (doplňme, že $P = (P^{-1})^{-1}$) můžeme nahradit za jejich libovolné nenulové skalární násobky, tedy takovýchto dvojic D, P je nekonečně mnoho. $\square$