MB101 – Matematika I
Dodatečný test
Sem. sk. 01, 17. 12. 2008

Příklad 1 (5 bodů). Podle magnetických vlastností dělíme látky na diamagnetické, paramagnetické a feromagnetické. Určete počet všech možných rozdělení 8 látek podle magnetických vlastností, která se liší tím, kolik z nich je diamagnetických, paramagnetických, feromagnetických.

Výsledek:

$$\binom{10}{8} = 45$$

Příklad 2 (5 bodů). Dvě osoby se domluvily, že se setkají na určitém místě mezi 12.00 a 16.00. Časy jejich příchodů jsou náhodné. Osoba, která přijde na dané místo první, počká 1 hodinu. Nedočká-li se druhé, odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?

Výsledek:

$$\frac{7}{16}$$

Příklad 3 (5 bodů). Vypište všechny relace na dvouprvkové množině $\{1, 2\}$, které současně nejsou reflexivní, jsou symetrické a nejsou tranzitivní.

Výsledek:

$$\{[1,2],\ [2,1]\}, \qquad \{[1,2],\ [2,1],\ [1,1]\}, \qquad \{[1,2],\ [2,1],\ [2,2]\}$$

Příklad 4 (5 bodů). Vyřešte systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1. \end{array}$$

Výsledek:

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Příklad 5 (5 bodů). Nalezněte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6 (5 bodů). Spočtěte

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Výsledek:

$$-18$$

Příklad 7 (5 bodů). Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ najděte matici přechodu od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$, přičemž

$$\underline{u} = \left((0,1,0)^T,\ (0,0,1)^T,\ (1,0,0)^T\right), \qquad \underline{v} = \left((0,0,1)^T,\ (1,0,0)^T,\ (0,1,0)^T\right).$$

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 8 (5 bodů). Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vektory

$$(1,1,2,0,0)^T, \qquad (1,-1,0,1,a)^T, \qquad (1,b,2,3,-2)^T$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ po dvou ortogonální?

Výsledek:

$$a = \frac{9}{2}, \qquad b = -5$$

Příklad 9 (5 bodů). Stanovte libovolnou bázi $\operatorname{Im} A^T$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Výsledek – např.:

$$\big((4, 2, 2, 1, -2)^T,\ (1, 2, -2, -2, 1)^T\big)$$

Příklad 10 (5 bodů). V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ určete projekci vektoru $(1, 1, 3)^T$ na podprostor

$$\operatorname{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 11 (5 bodů). Uveďte geometrickou násobnost jednotlivých vlastních hodnot matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$1 \text{ pro } \lambda_1 = 4, \qquad 2 \text{ pro } \lambda_2 = 3$$

Příklad 12 (5 bodů). V jisté africké přírodní rezervaci žije konstantní počet K slonů, kteří volně přecházejí ze severní části rezervace do jižní a opačným směrem. Sloni jsou označeni a pravidelně – každý měsíc – se určuje, ve které části rezervace je který slon. Takto se zjistilo, že 60 % slonů, kteří byli před měsícem v severní části rezervace, je v jižní části a že 30 % slonů, kteří byli před měsícem v jižní části, je v severní. Za předpokladu, že se sloni budou přesně takto přesouvat i nadále, vyjádřete hodnotu (jako podíl K), na které se po dostatečně dlouhé době ustálí počet slonů v jižní části.

Výsledek:

$$\frac{2}{3}\,K$$