Vektorové prostory I - ddú

1. Zjistěte, zda množina $V = \{ (x,y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ s operacemi $(x,y) \oplus (x^{|},y^{|}) = (x+x^{|},y+y^{|})$, $k \odot (x,y) = (2kx,2ky)$, $k \in \mathbf{R}$ tvoří vektorový prostor.

[ne]

2. Zjistěte, zda $V = Mat_{2x3}$ s operacemi sčítání matic a násobení matice skalárem tvoří vektorový prostor.

[ano]

3. Rozhodněte, zda následující množiny s operacemi sčítání matic a násobení matice skalárem tvoří vektorový prostor:
a) čtvercové matice řádu n
b) symetrické matice řádu n
c) invertibilní (tj, regulární) matice řádu n
d) antisymetrické matice řádu n

[ano, ano, ne, ano]

4. Rozhodněte, zda polynomy nad reálnými čísly stupně nejvýše k tvoří vektorový prostor.

[ano]

5. Rozhodněte, zda následující množiny jsou vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$:
a) přímka $x = y$
b) přímka $y = x + 1$
c) první kvadrant (včetně hraničních přímek)
tip: Množiny si nejprve přepište do tvaru $M = \{ (x,y) : ... \}$.

[ano, ne, ne]

6. Napište nějakou bázi vektorových prostorů:
a) $\mathbf{R}^3$
b) Mat_{2x2}
c) P_2 (polynomy stupně nejvýše 2)

7. Tvoří vektory $(1,1,1)^T$, $(1,2,0)^T$ a $(1,3,1)^T$ bázi $\mathbf{R}^3$?

[ano]

8. Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly („nad reálnými čísly“ znamená, že skaláry berem z reálných čísel) s operacemi sčítání komplexních čísel a násobení komplexního čísla skalárem. Ukažte, že čísla 1+i a 1-i tvoří bázi tohoto prostoru a napište souřadnice čísla 5-2i v této bázi.

[3/2, 7/2]

9. Určete souřadnice vektoru $v = (2,3,1)^T$ v bázi $\alpha = ((1,1,1)^T, (1,2,0)^T, (1,3,1)^T)$.

[(2,3,-1)]

10. Najděte bázi a dimenzi součtu a průniku vektorových podprostorů P_1, P_2:
a) $P_1 = [(1,2,-1)^T, (-1,0,2)^T, (2,-1,0)^T, (1,1,1)^T]$, $P_2 = [(0,2,1)^T, (1,4,0)^T]$
b) $P_1 = [(1,-1,0,1)^T, (1,2,0,3)^T, (3,0,0,5)^T]$, $P_2 = [(0,-1,1,4)^T, (0,2,3,2)^T, (0,0,1,2)^T]$