Vektorové prostory II - ddú

1. Zjistěte, zda jsou následující množiny vektorové prostory:

a) $V = \{(x,y,z)\colon x, y, z \in \mathbf{R}\}$ s operacemi $(x,y,z)\oplus(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z')$, $k\odot(x,y,z) = (kx,y,z)$, $k \in \mathbf{R}$

a) $V = \{(x,y)\colon x, y \in \mathbf{R}\}$ s operacemi $(x,y)\oplus(x',y') = (x+x'+1,y+y'+1)$, $k\odot(x,y) = (kx,ky)$, $k\in \mathbf{R}$

[ano; ne]

2. Zjistěte, zda daná podmnožina tvoří vektorový podprostor v $\mathbf{R}^2$ (s obvyklými operacemi sčítání a násobení skalárem):

a) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x.y \geq 0\}$

b) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x = y + 1\}$

[ne; ne]

3. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje množinu α na bázi prostoru $\mathbf{R}^4$?

a) $\alpha = [\,(1,-2,1,-1)^T, (1,0,-1,-1)^T, (1,1,-2,0)^T\,]$

$u_1 = (-1,2,-1,1)^T$, $u_2 = (3,-1,-2,-1)^T$, $u_3 = (2,1,0,-2)^T$, $u_4 = (2,1,-3,-2)^T$

b) $\alpha = [\,(1,3,0,-1)^T, (1,0,0,-1)^T, (0,2,1,0)^T\,]$

$u_1 = (-1,1,-1,1)^T$, $u_2 = (3,-1,0,-3)^T$, $u_3 = (2,1,0,-2)^T$, $u_4 = (1,-2,0,-1)^T$

[u_3; žáden]

4. Nalezněte souřsdnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru V:

a) $v = (2,1,1)^T$, $\alpha = [\,(2,7,3)^T, (3,9,4)^T, (1,5,3)^T\,]$, $V = \mathbf{R}^3$

b) $v = (2,1,1)^T$, $\alpha = [\,(1,0,1)^T, (1,0,0)^T, (1,1,1)^T\,]$, $V = \mathbf{R}^3$

c) $v = (0,0,2,7)^T$, $\alpha = [\,(4,2,-1,-6)^T, (3,1,1,-2)^T, (1,2,1,1)^T, (2,3,1,0)^T]$, $V = \mathbf{R}^4$

d) $v = (1,1,1,1)^T$, $\alpha = [\,(0,0,0,-5)^T, (1,2,3,1)^T, (1,0,-1,0)^T, (0,1,1,0)^T]$, $V = \mathbf{R}^4$

e) $v = 4 - 4x - 2x^2$, $\alpha = (1 - x^2, 1 + x, 1 - x)$, $V = \mathbf{R_2[x]}$ (polynomy st 2 nad $\mathbf{R}$)

f) $v = x^3 + x^2 + x + 1$, $\alpha = (1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3)$, $V = \mathbf{R_3[x]}$

g) $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $V = \mathbf{Mat_2(R)}$

5. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineární. Pokud ano, najděte Ker f a Im f.

a) $f(x,y) = (x, y^2)$

b) $f(x,y) = (2x + 3y, x - y)$

c) $f(x,y) = (x, 1 - y)$

d) $f(x,y,z) = ((x+y)^2, x - y, x + y + z)$

[ne; ano: Ker f = $\{0\}$, Im f = $\mathbf{R}^2$; ne; ne]

6. Nechť α a β jsou báze v $\mathbf{R}^3$. Najděte matici přechodu od báze α k bázi β a pomocí ní určete souřadnice vektoru $w = (-5,8,-5)$ v bázi β:

a) $\alpha = [\,(-3,0,-3)^T, (-3,2,-1)^T, (1,6,-1)^T\,]$, $\beta = [\,(-6,-6,0)^T, (-2,-6,4)^T, (-2,-3,7)^T\,]$

b) $\alpha = [\,(2,1,1)^T, (2,-1,1)^T, (1,2,1)^T\,]$, $\beta = [\,(3.1,-5)^T, (1,1,-3)^T, (-1,0,2)^T\,]$

7. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_3[x]}$ jsou dány báze $\alpha = (1,x,x^2,x^3)$ a $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$. Najděte matici přechodu od báze α k bázi β a matici přechodu od báze β k bázi α.