

MB101\ 10 – I. zápočtová písemka

skupina C

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtete zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. Kolik je sedmiciferných čísel takových, že jsou dělitelné 20, žádné 2 cifry se v jejich zápisu nevyskytují dvakrát a jejich první cifrou je buď jednička, nebo dvojka? (3 body)
2. Kolik řešení má rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$
 - a) v $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, (2 body)
 - b) v $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$? (2 body)
3. Střelec vystřelí na terč 5 ran z pistole. Při každém výstřelu má pravděpodobnost zásahu $\frac{3}{5}$ a jednotlivé výstřely jsou na sobě nezávislé. Určete pravděpodobnost:
 - a) že se alespoň jednou trefí, (2 body)
 - b) že se trefil prvními 4 ranami a pátou ranou minul, jestliže víme, že se alespoň jednou trefil. (2 body)
4. Střelíme z luku na terč o poloměru 80cm. Všechny body terče mají stejnou pravděpodobnost zásahu a terč trefíme jistě. Jaká je pravděpodobnost, že se trefíme do bodu, který je od středu i od okraje terče vzdálen alespoň 10cm? (3 body)
5. Pomocí determinantu vypočtete obsah trojúhelníku určeného body $[0, 1]$, $[-3, -5]$, $[2, -2]$. (2 body)
6. Na množině všech celých čísel \mathbb{Z} máme definovanu relaci \sim předpisem

$$a \sim b \Leftrightarrow a \leq b \text{ a zároveň } a \cdot b \geq 0.$$

Rozhodněte a dokažte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, tranzitivní či antisymetrická. (Tzn. je-li vaše odpověď pro danou vlastnost *ano*, uveďte důkaz, v opačném případě uveďte protipříklad.) (4 body)

MB101\ 10 – I. zápočtová písemka

skupina D

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtete zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. Kolika způsoby lze mezi 9 lidí rozdělit 6 jablek a 3 hrušky, jestliže každý musí dostat 1 kus ovoce? (3 body)
2. Kolika způsoby lze do 3 různých obálek rozdělit 14 padesátikorunových bankovek, jestliže:
 - a) na rozdělení neklademe žádné omezení, (2 body)
 - b) v každé obálce musí být alespoň 100 korun? (2 body)
3. Hráč si šestkrát po sobě si zahraje skořápky, v každé hře má pravděpodobnost výhry $\frac{1}{3}$ a jednotlivé hry jsou na sobě nezávislé. Určete pravděpodobnost:
 - a) že alespoň jednou vyhraje, (2 body)
 - b) že v první a poslední hře vyhrál a v ostatních prohrál, jestliže víme, že alespoň jednu hru vyhrál. (2 body)
4. Nechť $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$ je náhodně vybraná dvojice čísel ze čtverce v rovině určeného body $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$, $[0, 2]$. Určete pravděpodobnost, že tato dvojice čísel splňuje nerovnici $y \geq |x - 1| + 1$. (3 body)
5. Pomocí determinantu vypočtete obsah trojúhelníku určeného body $[-1, 0]$, $[4, 1]$, $[5, -3]$. (2 body)
6. Na množině všech přirozených čísel \mathbb{N} máme definovanou relaci \sim předpisem

$$a \sim b \Leftrightarrow a + b \text{ je sudé číslo.}$$

Rozhodněte a dokažte, zda je tato relace reflexivní, symetrická, tranzitivní či antisymetrická. (Tzn. je-li vaše odpověď pro danou vlastnost *ano*, uveďte důkaz, v opačném případě uveďte protipříklad.) (4 body)