MB101\ 10 – III. zápočtová písemka

skupina C

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ všech matic typu 2×2 nad reálnými čísly uvažme podmnožinu $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a\dot{b} \geq 0\}$. Rozhodněte a dokažte, zda M je podprostorem $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (4 body)

2. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů nejvýše 3. stupně s reálnými koeficienty najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostoru

   $$Span < 2x^3+2x^2+3x+1, 2x^3+x^2+x, 2x^3-x-1, -2x^3-4x^2-7x-3, 6x^3+5x^2+7x+2.-6x^3-x^2+x+2 > .$$

   Ve vámi vybrané bázi pak určete souřadnice polunomu $6x^3+x^2-x-2$.(4 body)

3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

   $$f(a, b, c, d) = (3a - b, 2a + b + 2c, -b - d).$$

   Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bazích a najděte nějakou bázi prostorů $Ker(f)$ a $Im(f)$. (4 body)

4. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ máme báze $\alpha = [1, x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x + 1]$ a $\beta = [x^3 - x^2 + 1, x^3 - x^2 - x + 2, 2x^3 - x^2, x^2 + x - 1]$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a pomocí ní spočtěte souřadnice polynomu p v bázi β, jestliže souřadnice polynomu p v bázi α jsou $(1, 1, 0, -1)^T$. (4 body)

5. V $\mathbb{R}^5$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru

   $$W = Span < (2, 0, 1, -2, 1), (1, -1, 2, 1, 0), (2, -1, 1, -3, 2) > .$$

   (4 body)

MB101\ 10 – III. zápočtová písemka

skupina D

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ všech matic typu 2×2 nad reálnými čísly uvažme podmnožinu $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = c - 2d\}$. Rozhodněte a dokažte, zda M je podprostorem $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (4 body)
2. Doplňte množinu $\{3x^2 + x, x^3 - x^2 - 2x + 1\}$ na nějakou bázi prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ prostoru všech polynomů stupně nejvýše 3 s reálnými koeficienty. (4 body)
3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ předpisem
$$f(a, b, c, d) = (a + b - c - d, 2a + 2c, a + d).$$
Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bazích a najděte nějakou bázi prostorů $Ker(f)$ a $Im(f)$. (4 body)
4. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ máme báze $\alpha = [x^2 + 1, x^3 + 1, x + 1, x^3 + x^2 + x + 1]$ a $\beta = [-2x^3 - x + 1, x^3 - x^2 + 2, 2x^3 + x^2 - x, 5x^3 + x^2]$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a pomocí ní spočtěte souřadnice matice A v bázi β, jestliže souřadnice matice A v bázi α jsou $(0, 2, -1, 3)^T$. (4 body)
5. V $\mathbb{R}^5$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru
$$W = Span < (2, 1, 0, 0, 1), (3, 0, 1, 1, -1), (0, -1, 2, 1, -1) > .$$
(4 body)