MB101\ 10 – doplňující písemka

1. Rozhodněte a **dokažte**, zda je následující relace na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ reflexivní, symetrická, tranzitivní či antisymetrická:

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \leq b \text{ a zároveň } a \cdot b \geq 0).$$

2. Spočtěte determinant matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1).$$

   V $\mathbb{R}^3$ máme bázi $\alpha = [(1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1)]$, v $\mathbb{R}^2$ pak máme bázi $\beta = [(2,1), (0,2)]$. Určete matici zobrazení f ve standardních bazích a pomocí ní vypočtěte $Ker(f)$ (tzn. najděte nějakou jeho bázi). Poté určete matici zobrazení f v bazích α, β.

4. Nalezněte vlastní čísla matice A, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů. Zjistěte, zda je matice A podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, určete matici P takovou, že $A = PDP^{-1}$, kde D je ona diagonální matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Každý příklad je za 5 bodů.)

MB101\ 10 – doplňující písemka

1. Rozhodněte a **dokažte**, zda je následující relace na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ reflexivní, symetrická, tranzitivní či antisymetrická:

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \leq b \text{ a zároveň } a \cdot b \geq 0).$$

2. Spočtěte determinant matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1).$$

V $\mathbb{R}^3$ máme bázi $\alpha = [(1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1)]$, v $\mathbb{R}^2$ pak máme bázi $\beta = [(2,1), (0,2)]$. Určete matici zobrazení f ve standardních bazích a pomocí ní vypočtěte $Ker(f)$ (tzn. najděte nějakou jeho bázi). Poté určete matici zobrazení f v bazích α, β.

4. Nalezněte vlastní čísla matice A, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a najděte nějaké báze příslušných vlastních prostorů. Zjistěte, zda je matice A podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, určete matici P takovou, že $A = PDP^{-1}$, kde D je ona diagonální matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Každý příklad je za 5 bodů.)