MB101 – dobrovolné domácí úkoly
Kombinatorika

1. Mám 6 jablek a 3 hrušky, chci udělat salát z pěti kusů ovoce, aby tam byla nejméně jedna hruška. Kolika způsoby to lze udělat?

2. Kolika způsoby lze rozdělit do deseti očíslovaných přihrádek čtyři stejné modré koule a šest stejných bílých koulí, jestliže každá přihrádka musí být obsazena?

3. Čtyři děti hrající si na pískovišti našly šest hliněných a čtyři skleněné kuličky. Kolika způsoby si je mohou rozdělit? Jak to dopadne v případě, kdy každé dítě chce mít aspoň jednu kuličku od obou druhů?

4. Určete počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ v $\mathbb{N}$, resp. v $\mathbb{N}_0$ (kde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

5. Bridž je karetní hra, při níž se mezi 4 hráče rozdělí 52 karet (tak, že každý dostane 13 karet). Kolik existuje možných rozdání mezi 4 různé hráče?

6. Do výtahu pětipatrové budovy nastoupilo 8 osob (nerozlišujeme je). Kolika způsoby mohou vystoupit, když v každém patře musí vystoupit alespoň jedna osoba?

7. Určete, kolika způsoby je možné na šachovnici (8×8 polí) vybrat trojici polí tak, aby vybraná trojice políček neležela ve stejném sloupci či stejném řádku.

8. Kolika způsoby je možné seřadit u startovní čáry osm závodních aut do dvou řad po čtyřech autech, jestliže:

   a) v každé řadě záleží na pořadí,

   b) na pořadí v řadách nezáleží.

9. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky. Kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby lze vybrat 5 kuliček, jestliže v sáčku je:

   a) alespoň 5 kuliček od každé barvy,

   b) 5 červených, 4 modré a 4 zelené kuličky.

10. V košíku je 5 červených, 7 modrých a 6 žlutých velikonočních vajíček. Kolika způsoby lze z nich vybrat pět vajíček tak, aby nebyla všechna téže barvy?

11. Kolika různým telefonním stanicím můžeme přidělit čísla, jsou-li všechna telefonní čísla osmiciferná a ani jedno nezačíná nulou?

12. Při výrobě určité součástky je třeba provést 4 operace A, B, C, D, pro které platí současně tyto podmínky:

   - Operace A nesmí být poslední.
   - Provedeme-li operaci B, musí bezprostředně po ní následovat operace C, a obráceně, provedeme-li operaci C, musí bezprostředně následovat operace B.

   Kolika různými postupy je možno tyto operace provést?

13. Kolika způsoby je možné umístit 9 brigádníků na tři pracoviště, jestliže na prvním pracovišti jsou zapotřebí 4 brigádníci, na druhém pracovišti 3 brigádníci a na třetím pracovišti 2 brigádníci?

14. Dokažte rovnost
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
   (Hint: Výrazy na levé straně rozepište podle definice kombinačního čísla a vzniklý výraz se pokuste upravit na tvar odpovídající kombinačnímu číslu na pravé straně.)

15. Nechť A je konečná množina a n je počet jejích prvků ($n > 3$). Zmenšíme-li počet prvků množiny A o 3, zmenší se počet dvoučlenných kombinací bez opakování (vytvořitelných z prvků množiny A) o 33. Určete původní počet prvků, tj. číslo n. (Hint: Podmínku ze zadání vhodně zapište pomocí rovnice obsahující kombinační čísla. Tuto rovnici pak můžete v několika krocích vyřešit pomocí vzorečku z předchozího příkladu.)

Výsledky

1. 120 2. 210 3. 2940, 10 4. 364, 816 5. $\frac{52!}{(13!)^4}$ 6. 35 7. 40768
8. a) 40320, b) 70 9. a) 21, b) 19 10. 18 11. $9 \cdot 10^7$ 12. 8 13. 1260
15. n=13