MB101\ 11 – III. zápočtová písemka

skupina A

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ všech matic typu 2×2 nad reálnými čísly uvažme podmnožinu $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Rozhodněte a dokažte, zda M je podprostorem $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (4 body)

2. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ polynomů nejvýše 3. stupně s reálnými koeficienty najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostoru

   $$Span < 3x^3{+}x{+}2, 3x^2{+}2x{+}1, -x^3{+}2x^2{+}3x{+}1, x^3{+}x^2{+}5x{+}3, -2x^3{+}4x^2{-}1, -5x^3{+}x^2{+}3x{-}1 > .$$

   (4 body)

3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

   $$f(a, b, c, d) = (a + b, 3c + 2d, -b - c - d).$$

   Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bazích a najděte nějakou bázi prostorů $Ker(f)$ a $Im(f)$. (4 body)

4. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ máme báze $\alpha = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}]$ a $\beta = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}]$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a pomocí ní spočtěte souřadnice matice A v bázi β, jestliže souřadnice matice A v bázi α jsou $(-1, 0, 2, 1)^T$. (4 body)

5. V $\mathbb{R}^5$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru

   $$W = Span < (2, 1, 1, 3, 2), (1, 2, 1, 3, 1), (-1, 2, -1, 0, -2) > .$$

   (4 body)

MB101\ 11 – III. zápočtová písemka

skupina B

Na vypracování písemky máte 50 minut. Vždy si pořádně přečtěte zadání příkladu! Svůj postup řádně komentujte. **Neopisujte!**

1. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ všech matic typu 2×2 nad reálnými čísly uvažme podmnožinu $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, 2a + b = 0$ a zároveň $b = c\}$. Rozhodněte a dokažte, zda M je podprostorem $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (4 body)

2. Doplňte množinu $\{x^3 + 2x^2 + x, x^3 + 2x + 4\}$ na nějakou bázi prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ všech polynomů nejvýše 3. stupně s reálnými koeficienty. (4 body)

3. Mějme dáno lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ předpisem
$$f(a, b, c, d) = (2a + b - c, b + 3c, a - 2d).$$
Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bazích a najděte nějakou bázi prostorů $Ker(f)$ a $Im(f)$. (4 body)

4. V prostoru $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ máme báze $\alpha = [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}]$ a $\beta = [\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}]$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a pomocí ní spočtěte souřadnice matice A v bázi β, jestliže souřadnice matice A v bázi α jsou $(1, -2, 0, -1)^T$. (4 body)

5. V $\mathbb{R}^5$ najděte nějakou bázi ortogonálního doplňku podprostoru
$$W = Span < (1, -2, 1, 0, 2), (2, -1, 1, -2, 1), (-3, 3, 1, 4, -1) > .$$
(4 body)