Vektorové prostory

Nechť V je množina, na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem. Pak V je vektorový prostor, pokud platí, $\forall u,v,w \in V,\ a,b \in \mathbb{R}$:

A1 (komutativita) $u+v = v+u$

A2 (asociativita) $\{u+(v+w)\} = (u+v)+w$

A3 $\exists\, 0 \in V$ tž. $0+u = u$

A4 $\exists\, -u \in V$ tž. $(-u)+u = 0$

A5 $a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$

A6 $(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u$

A7 (asociativita $\cdot$) $(a\cdot b)\cdot u = a\cdot(b\cdot u)$

A8 $1\cdot u = u$

Příklad 1

Zjistěte, zda množina $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x\cdot y$, $a \odot x = x^a$ pro $x,y \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor.

Řešení:

A1 $x\oplus y = x\cdot y = y\cdot x = y\oplus x$

A2 $(x\oplus y)\oplus z = (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) = x\oplus(y\oplus z)$

A3 neutrálním prvkem (= nulový vektor) pro $\oplus$ je 1
$x\oplus 1 = x\cdot 1 = x$

A4 inverzní prvek (= opačný vektor) pro $\oplus$ je $\frac{1}{x}$
$x\oplus \frac{1}{x} = x\cdot\frac{1}{x} = 1$

A5 $a\odot(x\oplus y) = (x\cdot y)^a = x^a\cdot y^a = (a\odot x)\oplus(a\odot y)$

A6 $(a+b)\odot x = \cancel{(a\odot x)}\ x^{(a+b)} = x^a\cdot x^b = (a\odot x)\oplus(b\odot y)$

A7 $(a\cdot b)\odot x = x^{a\cdot b} = (x^b)^a = a\odot(b\odot x)$

A8 $1\odot x = x^1 = x$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^+,\oplus,\odot)$ je vektorový prostor

Příklad 2

$V = \{(x,y),\ x,y\in\mathbb{R}\}$ $\quad (x,y)\oplus(x',y') = (x+x', y+y')$
$\quad k\odot(x,y) = (2kx, 2ky)$

A1 $(x,y)\oplus(u,v) = (x+u, y+v) = (u+x, v+y) = (u,v)\oplus(x,y)$

A2 $[(x,y)\oplus(u,v)]\oplus(w,z) = (x+u, y+v)\oplus(w,z) =$
$= (x+u+w, y+v+z) = (x,y)\oplus(u+w, v+z) = (x,y)\oplus[(u,v)+(w,z)]$

A3 $(0,0)+(x,y) = (x,y)$

A4 $(x,y)+(-x,-y) = (0,0)$ $\quad$ A5, A6 platí $\quad$ A8 ne

~~A7~~ $(a\cdot b)\odot(x,y) = (2abx, 2aby) \times a\odot(b\odot(x,y)) = (4abx, 4aby)$

Vektorové podprostory

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Množina $W \subseteq V$ se nazývá (lineární) vektorový podprostor V, právě když $W \neq \emptyset$ a $\forall\, u, v \in W$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $u + v \in W$, $a \cdot u \in W$.

<u>Příklad 3</u>

Určete, zda množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$.

(1) $M \neq \emptyset$

(2) pokud (x,y) a $(u,v) \in M$, pak i $(x,y)+(u,v) \in M$, neboť $x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \Rightarrow x+u \geq 0,\ y+v \geq 0$

~~(3)~~ $(x,y) \in M \Rightarrow a \cdot (x,y) = (ax, ay) \notin M$ obecně, neboť pro $a < 0 \Rightarrow (ax, ay) < 0$

$\Rightarrow M$ není vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$.

<u>Příklad 4</u>

$M = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ b = a + c\}$

(1) $M \neq \emptyset$

(2) $(a,b,c) + (d,e,f) = (a+d,\ b+e,\ c+f) \in M$, neboť $b = a + c$, $e = d + f \Rightarrow b + e = a + d + c + f$

(3) $t \cdot (a,b,c) = (ta, tb, tc) \in M$, neboť $b = a + c \Rightarrow tb = ta + tc$

M je vektorový podprostor v $\mathbb{R}^3$.

Báze a Dimenze

Vektory $u_1, \dots, u_k$ tvoří bázi vektorového prostoru V, pokud jsou lineárně nezávislé a generují celý prostor V, ($\operatorname{span}\langle u_1, \dots, u_k \rangle = V$)
Dimenze vekt. pr. V je číslo $\dim V$ udávající počet vektorů báze.

<u>Příklad 5</u>

Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru $V = \mathbb{R}^4$.

$M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5), (3,4,5,6), (-4,-5,-6,-7), (5,6,7,8)\}$

Řešení:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2I \\ -3I \\ -4I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5)\}$$

$\dim \operatorname{span}\langle M \rangle = 2$

značení pro bázi jsem ve skriptech nenašla

Příklad 6

Doplňte množinu $M = \{(-1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení: Vybereme vektor ze standardní báze.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Vektory množiny M jsou LN a doplněním kterýmkoliv z vektorů standardní báze získáme bázi $\mathbb{R}^4$.

Souřadnice

Nechť $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ je báze prostoru V a nechť $v \in V$. Potom v lze jednoznačně vyjádřit jako

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i .$$

Pak sloupcový vektor

$$[v]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme souřadnicemi vektoru v v bázi α.

Příklad 7

Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru V.

$V = Mat_{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ b + c + d &= 2 \\ c + d &= 3 \\ d &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d = 4,\ c = -1,\ b = -1,\ a = -1$$

Potom tedy $[v]_\alpha = (-1,-1,-1,4)^T$

Součet a průnik podprostorů

- S, T podprostory vekt. prostoru V. Množina
$$S+T = \{x+y \,;\, x \in S, y \in T\}$$ je podprostor a nazýváme součet S a T. Pokud $S \cap T = \emptyset$, $S+T$ je přímý součet.

- Pro konečnědimenzionální prostory platí:
$$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$$
resp. $$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

Příklad 1)

Mějme $P_1 = [M_1]$, $P_2 = [M_2]$ v $\mathbb{R}^4$, kde
$$M_1 = \{u_1 = (4,0,-2,6),\ u_2 = (2,1,-2,3),\ u_3 = (3,1,-2,4)\}$$
$$M_2 = \{v_1 = (-1,-1,0,2),\ v_2 = (2,2,-1,3),\ v_3 = (0,1,1,0)\}.$$
Najděte $P_1 + P_2$, $P_1 \cap P_2$, popiš bázi a dimenzi.

Řešení: a) $P_1 + P_2 = \{x+y \,;\, x \in P_1, y \in P_2\}$, tedy $P_1 + P_2 = [M_1 \cup M_2]$.
Hledáme bázi $[M_1 \cup M_2]$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sim \\ 2\cdot + I \\ 2\cdot - 3I \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & +1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sim \\ +2II \\ +III \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, u_3, v_2 – LN $\Rightarrow$
$$P_1 + P_2 = [u_1, u_2, u_3, v_2] = \mathbb{R}^4$$
$$\dim(P_1 + P_2) = 4$$

b) $x \in P_1 \cap P_2$
$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in P_1$$
$$x = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \in P_2$$
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 - b_3 v_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sim \\ 2\cdot + I \\ 2\cdot - 3I \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \sim \\ +2II \\ +III \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$b_3 = p$
$b_2 = -p$
$b_1 = r$
$a_3 + r + \cancel{4p} - \cancel{4p} = 0$
$a_3 = -r$

$a_2 \mp r + r + 2p - p = 0$
$a_2 = -p$
$4a_1 \mp \cancel{2p} \mp 3r - \cancel{r} + \cancel{2p} = 0$
$4a_1 = 4r$
$a_1 = r$

$P_1 \cap P_2 = \{ x = r u_1 - p u_2 - r u_3 ;\ p, r \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x = r(u_1 - u_3) - p u_2,\ p, r \in \mathbb{R} \} = \{ x = r \cdot (1,-1,0,2) +$

$+ p \cdot (-2,-1,2,-3);\ p, r \in \mathbb{R} \} = [(1,-1,0,2),(-2,-1,2,-3)].$

resp.

$P_1 \cap P_2 = \{ x = r v_1 + p(v_3 - v_2);\ r, p \in \mathbb{R} \} = [(1,-1,0,2)(-2,-1,2,-3)]$

$\dim(P_1 \cap P_2) = 2$

<u>Lineární zobrazení</u>

Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá lineární, jestliže platí

(1) $\forall x, y \in U: f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $\forall a \in K,\ \forall x \in U: f(ax) = a \cdot f(x)$

Množina $\operatorname{Ker} f = \{ x \in U;\ f(x) = 0 \}$ – jádro

$\operatorname{Im} f = \{ y \in V;\ y = f(x),\ x \in U \}$ – obraz

Isomorfismus: $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = V$.

<u>Příklad 2</u>

Zjistěte zda je zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární. Pokud ano, určete $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f$.

(a) $f(x) = (1 + x_1, x_2)$

(b) $f(x) = (1, 2)$

(c) $f(x) = (x_1^2, -2x_2)$

(d) $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$

Řešení:

1) V případech a, b není obrazem nulového vektoru nulový vektor, tedy se nejedná o lin. zobrazení.

2) $f(x+y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = ((x_1+y_1)^2, -2 \cdot (x_2 + y_2))$

$f(x) + f(y) = (x_1^2, -2x_2) + (y_1^2, -2y_2) = (x_1^2 + y_1^2, -2(x_2 + y_2))$

$L \neq P$

3) $f(ax+by) = f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) =$

$= (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2,\ ax_1 + by_1 - ax_3 - by_3) =$

$af(x) + bf(y) = (ax_1 + ax_2, ax_1 - ax_3) + (by_1 + by_2, by_1 - by_3) =$

$= \dots$ $L = P$

je lineární

$\operatorname{Ker} f$: $f(x) = 0$ $x_1 + x_2 = 0$ $x_1 - x_3 = 0$ $\Rightarrow x_1 = x_3,\ x_2 = -x_1$

$x_1 = t \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ (t, -t, t),\ t \in \mathbb{R} \} = [(1,-1,1)]$

$\operatorname{Im} f$: obrazy vektorů st. báze jsou $(1,1), (1,0), (0,-1)$

$\operatorname{Im} f = [(1,1),(1,0),(0,-1)] = [(1,0),(0,1)] = \mathbb{R}^2$

Příklad 3

lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(x) = (x_1+x_2+x_3+x_4,\ -x_1-x_2-x_3-x_4,\ x_1-x_2+x_3-x_4,\ -2x_1+2x_2-2x_3+2$

Určete Ker f, Im f a najděte ~~při~~ nějakou přísl. bázi.

Řešení: a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0\\ -x_1-x_2-x_3-x_4 &= 0\\ x_1-x_2+x_3-x_4 &= 0\\ -2x_1+2x_2-2x_3+2x_4 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x_4 = t,\ x_3 = s,\ \Rightarrow x_2 = -t,\ x_1 = -s$

$\mathrm{Ker}\, f = \{ s\cdot(-1,0,1,0) + t\cdot(0,-1,0,1);\ s,t \in \mathbb{R}\}$

$\alpha_{\mathrm{Ker} f} = [(-1,0,1,0),(0,1,0,-1)]$

b) obrazy standardní báze:

$e_1 \to (1,-1,1,-2)$

$e_2 \to (1,-1,-1,2)$

$e_3 \to (1,-1,1,-2)$

$e_4 \to (1,-1,-1,+2)$

vybereme lin. nezávislé

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{LN } e_1 \text{ a } e_2$$

$\mathrm{Im}\, f = \{ a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2);\ a_1,a_2 \in \mathbb{R}\} =$

$\{ a_1\cdot(1,-1,1,-2) + a_2(1,-1,-1,2),\ a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$

$\alpha_{\mathrm{Im} f} = [(1,-1,1,-2),(1,-1,-1,2)]$

Matice lin. zobrazení, matice přechodu

$f : U \to V$ $\alpha : u_1, \dots, u_n$

báze α báze β $\beta : v_1, \dots, v_m$

matice lin. zobrazení $f_{\beta\alpha} = \left(f(u_1)_\beta \; f(u_2)_\beta \dots f(u_n)_\beta \right)$

"obrazy vektorů báze α vyjádřené v souřadnicích vzhledem k bázi β"

$$f(u_1) = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

Matice přechodu od báze α k bázi β

$id : U_\alpha \to U_\beta$ "vektory báze α v souřadnicích vzhledem k bázi β"

$id_{\beta\alpha} = id_{\alpha\beta}^{-1}$

Platí: $f : U \to V$ (α, β; γ, δ)

$$f_{\delta\gamma} = id_{\delta\beta} \cdot f_{\beta\alpha} \cdot id_{\alpha\gamma}$$

$$T^{-1} \quad A \quad T$$ ← ve skriptech

Pro souřadnice platí:

$$(f(x))_\beta = (f)_{\beta,\alpha} \cdot (x)_\alpha$$

$$(x)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} (x)_\alpha$$

Příklad 4

Určete matici lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bazích α, β.

(a) $\alpha = \varepsilon_3$, $\beta = \varepsilon_2$

(b) $\alpha = \{(1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1)\}$, $\beta = \{(2,1), (0,2)\}$

a najděte obraz vektoru x, jestliže $(x)_\alpha = (0,-4,1)^T$

Řešení: Určení z definice.

(a) obrazy vektorů z α

$$f(1,0,0) = (1,2)$$
$$f(0,1,0) = (2,0)$$
$$f(0,0,1) = (-3,0)$$

protože $\beta = \varepsilon_2$

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = \varepsilon \Rightarrow$ z předpisu $f(x) = (-11, 0)$

(b)
$$f(1,2,0) = (5,2)$$
$$f(-2,1,0) = (0,-4)$$
$$f(3,1,-1) = (8,6)$$

$$(5,2) = a(2,1) + b(0,2) = (2a, a+2b)$$
$$2a = 5 \qquad a = 5/2$$
$$a + 2b = 2 \qquad b = -1/4$$
$$(0,-4) = 0(2,1) + -2\cdot(0,2)$$
$$(8,6) = 4(2,1) + 1(0,2)$$

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 4 \\ -1/4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (f(x))_\beta = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 4 \\ -1/4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = 4\cdot(2,1) + 9\cdot(0,2) = (8,22)$$

Příklad 5

Mějme $f: \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ lin. zobrazení dG. předpisem

$f(a+bx) = a + b(x+1) = a + b + bx$ a

$\gamma = (6+3x, 10+2x)$. Najděte matici zobrazení f v bázi γ.

Řešení:

1. možnost $\quad f_{\gamma\gamma} = (f(\gamma_1), f(\gamma_2))$

$$f(\gamma_1) = f(6+3x) = 9 + 3x$$
$$f(\gamma_2) = f(10+2x) = 12 + 2x$$

$$9 + 3x = a\cdot(6+3x) + b(10+2x)$$
$$9 + 3x = 6a + 10b + 3ax + 2bx$$
$$9 = 6a + 10b$$
$$3 = 3a + 2b$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{2\cdot II - I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 10 & 9 \\ 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$
$$b = 1/2 \qquad 6a + 5 = 9$$
$$6a = \cancel{3}4$$
$$a = 4/3$$

$$f_{\gamma\gamma} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$12 + 2x = c\cdot(6+3x) + d\cdot(10+2x)$$
$$12 = 6c + 10d$$
$$2 = 3c + 2d$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 10 & \cancel{9}\,12 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 10 & 12 \\ 0 & -6 & -8 \end{array}\right)$$
$$d = 4/3 \qquad \cancel{6c + \tfrac{40}{3} = 12}$$
$$6c = \cancel{-4}\ \tfrac{-4}{3}$$

2. način.

$$f: \underset{\mathcal{E}}{\overset{\mu}{\mathbb{R}_1[x]}} \to \underset{\mathcal{E}}{\overset{\mu}{\mathbb{R}_1[x]}}$$

$$A = f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(1) = 1$

$f(x) = 1 + x$

$$T = id_{\mathcal{E}\mu} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad id: \underset{\mu}{V} \to \underset{\mathcal{E}}{V}$$

$$id_{\mu\mathcal{E}} = id_{\mathcal{E}\mu}^{-1} = T^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 5/9 \\ +1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\det = 12 - 30 = -18$$

$$f_{\mu\mu} = \underbrace{id_{\mu\mathcal{E}}}_{T^{-1}} \underbrace{f_{\mathcal{E}\mathcal{E}}}_{A} \overbrace{id_{\mathcal{E}\mu}}^{T} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/9 & 5/9 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 5/9 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Příklad 6

V R^3 jsou dány báze $\alpha = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$, $\beta = ((-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1))$. Určete matici $(id)_{\beta,\alpha}$ a $(id)_{\alpha,\beta}$. Určete $(x)_\beta$, $(y)_\alpha$, přičemž $(x)_\alpha = (-1,3,0)^T$, $(y)_\beta = (2,4,7)^T$

Řešení:

$$(1,0,0) = a(-1,1,0) + b(1,1,0) + c\cdot(0,0,1)$$

$$1 = -a+b \qquad a = -1/2$$
$$0 = a+b \qquad b = 1/2$$
$$c = 0 \qquad c = 0$$

$$(1,1,0) = a\cdot(-1,1,0) + b(1,1,0) + c(0,0,1)$$

$$c = 0, \quad a+b = 1 \qquad b = 1-a = 1-0 = 1$$
$$-a+b = 1 \qquad -a+1-a = 1$$
$$-2a = 0$$
$$a = 0$$

$$(1,1,1) = a\cdot(-1,1,0) + b\cdot(1,1,0) + c\cdot(0,0,1)$$

$$c = 1 \qquad a = 0$$
$$b = 1$$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (id)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x)_\beta = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(y)_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Příklad 7

Nechť α, β jsou stejné jako v příkladu 6. Nechť f je lin. zobrazení s maticí v bázi α

$$(f)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete jeho matici v bázi β.

$$(f)_{\beta\beta} = (id)_{\beta,\alpha} (f)_{\alpha\alpha} (id)_{\alpha,\beta}$$

$$(f)_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 8

Určete matici f lin. zobrazení z předchozího příkladu ve standardní bázi a najděte jeho předpis.

Řešení: $(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Předpis: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Příklad 9

Nechť $\alpha = ((1,0,-1,2,3),(-2,1,4,-3,1))$,

$\beta = ((0,1,2,1,7),(-1,2,5,0,11))$ jsou báze podprostoru P vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$. Určete matici přechodu od báze α k bázi β.

$$(1,0,-1,2,3) = a\cdot(0,1,2,1,7) + b\cdot(-1,2,5,0,11) =$$
$$= (-b, a+2b, 2a+5b, a, 7a+11b)$$
$$\Rightarrow a = 2,\ b = -1$$
$$(-2,1,4,-3,1) = c\cdot(0,1,2,1,7) + d\cdot(-1,2,5,0,11) \Rightarrow$$
$$c = -3 \quad d = 2$$

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$