Výsledky cvičení

1. VÝPOČET DETERMINANTU

1. (a) 19, (b) 36

2. (a) sudá, (b) lichá, (c) lichá, (d) lichá

3. (a) $x = 8$, $y = 3$, (b) $x = 2$, $y = 7$

4. (a) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, (b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, (c) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, (d) $(-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$, (e) $(-1)^n$

5. (a) ano, (b) ne

6. $+a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $-a_{12}a_{34}a_{23}a_{41}$

7. $\det A = -11$, $\det B = 90$, $\det C = -4$, $\det D = -100$, $\det E = 5$, $\det F = -2 + 2i$

8. $\det A = -195$, $\det B = 18$, $\det C = -28$, $\det D = 30$, $\det E = 39$, $\det F = 6$, $\det G = -\frac{1}{6}$, $\det H = -2$, $\det I = 301$, $\det J = -153$, $\det K = 1932$, $\det L = -336$, $\det M = -7497$, $\det N = 10$, $\det O = 60$, $\det P = -21$, $\det Q = 78$, $\det R = 800$

9. $\det A = -105$, $\det B = -18$

10. $\det A = [a+(n-1)x](a-x)^{n-1}$, nejprve k prvnímu sloupci přičteme všechny ostatní, a pak od všech řádků odečteme první
    $\det B = x^n + (-1)^{n+1}y^n$, uděláme rozvoj podle prvního sloupce
    $\det C = a_1a_2 \dots a_n(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_n})$, k prvnímu řádku přičteme $-\frac{1}{a_1}$ krát druhý řádek, $-\frac{1}{a_2}$ krát třetí řádek, atd.
    $\det D = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, uděláme rozvoj podle prvního sloupce
    $\det E = a_0x_1x_2 \dots x_n + a_1y_1x_2 \dots x_n + a_2y_1y_2 \dots x_n + \dots + a_ny_1y_2 \dots y_n$, uděláme rozvoj podle prvního řádku

11. $\det A = -(a_2 + a_3 + \dots + a_n)$, od prvního řádku odečteme všechny ostatní
    $\det B = a!$, ke všem řádkům přičteme první
    $\det C = (2n+1)(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, nejprve od všech řádků odečteme poslední řádek, a pak k prvnímu sloupci přičteme všechny ostatní sloupce
    $\det D = 0$, k prvnímu řádku přičteme všechny řádky
    $\det E = (-1)^{n-1}\, n!$, od všech řádků odečteme poslední řádek
    $\det F = x_1\,(x_2 - a_{12})\,(x_3 - a_{23})\,\dots\,(x_n - a_{n-1,n})$, začneme od posledního řádku a od každého řádku odečteme předchozí
    $\det G = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_1b_2 \dots b_n$, od všech sloupců odečteme poslední sloupec

det $H = (-1)^{n(n-1)}\, 2n$, začneme od posledního sloupce a od všech sloupců odečteme předchozí
det $I = b_1 \dots b_n$, od všech řádků odečteme první

12. det $A = 2 \det A_{n-1}$, pro $n \geq 2$, uděláme rozvoj podle posledního sloupce
det $B = 3 \det A_{n-1} - 2 \det An - 2$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle prvního řádku, pak u druhé matice podle prvního sloupce
det $C = 3 \det A_{n-1} - 2 \det An - 2$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle posledního řádku, pak u druhé matice podle posledního sloupce
det $D = 5 \det A_{n-1} - 6 \det A_{n-2}$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle posledního řádku, pak u druhé matice podle posledního sloupce
det $E = 7 \det A_{n-1} - 10 \det A_{n-2}$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle prvního řádku, pak u druhé matice podle prvního sloupce
det $F = (x+1) \det A_{n-1} - x \det A_{n-2}$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle prvního řádku, pak u druhé matice podle prvního sloupce
det $G = (x^2 - y^2) \det A_{2(n-1)}$, pro $n \geq 2$, uděláme rozvoj podle prvního řádku, pak u první matice podle posledního sloupce a u druhé matice podle prvního sloupce
det $H = \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$, pro $n \geq 3$, uděláme rozvoj podle prvního řádku, pak u druhé matice podle prvního sloupce

13. (a) 1, (b) $\frac{\pi}{2}(1+2k)$, $\frac{\pi}{3}(2+6k)$, $\frac{\pi}{3}(4+6k)$

14. det $A = -144$, po vytknutí ze druhého řádku matice dostáváme determinat $V(-1,1,2,-2)$
det $B = 2880$, transponováním matice dostáváme determinant $V(2,1,-2,3,-1)$
det $C = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$, matici transponejeme a od každého sloupce, počínaje druhým sloupcem, postupně odečteme vždy předchozí sloupec

15. det $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

16. $$P_n(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

2. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

1. $$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h(A) = 4$$

2. $f(x,y) = -2x_1y_1 - 2x_2y_1 - 8x_1y_2 - 4x_2y_2$

3. $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. $f_S = \frac{1}{2}x_1y_3 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_2y_4 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_4y_2$
   $f_A = -x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_4 - x_3y_4 + x_4y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_4y_2$

5. (a) $f_S = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_1 - x_3y_1 + x_3y_3$
   $f_A = 2x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y_1 + x_3y_1 - x_2y_3 + x_3y_2$

   (b) $f_S = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_1 + 3x_1y_3$
   $f_A = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_1 - 3x_1y_3$

6. $f(x,y) = 5x_2y_2 - 20x_3y_3$, $\alpha = [(1,0,0),(0,1,1),(0,-3,2)]$

7. např. standardní báze

8. (a) $f(x,y) = x_1y_3 - 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2$

   (b) $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$

9. např. $F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 36x_3^2$, (jednoznačně je určena pouze signatura), v bázi α : $[(1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (5,6,1)^T]$

10. (a) např. $F(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 20x_3^2$, v bázi $\alpha : [(1,0,0)^T, (1,-2,0)^T, (-2,6,2)^T]$

    (b) např. $F(x) = x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2$, v bázi $\alpha : \left[(1,1,0)^T, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T, (-1,-1,1)^T\right]$

11. (a) pozitivně definitní, $s = (2,0,0)$

    (b) indefinitní, $s = (1,1,1)$

    (c) negativně definitní, $s = (0,3,0)$

12. např. $F(x) = x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - 3x_3^2$, není pozitivně definitní

13. (a) $s = (1,1,1)$

    (b) $s = (2,1,0)$

    (c) $s = (1,2,0)$

14. (a) $s = (2,2,0)$

    (b) $s = (2,2,0)$

    (c) $s = (1,1,2)$

15. $F(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$
    diagonální tvar např.: $F_0(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 - \frac{4}{5}x_3^2$

16. (a) ani pozitivně ani negativně definitní pro libovolné a
    (b) negativně definitní pro $a < -1$
17. elipsa, $S = (-2, \frac{5}{3})$
18. (a) parabola
    (b) dvě různoběžky
    (c) hyperbola, $S = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
    (d) elipsa, $S = (-1, -1)$
    (e) parabola
    (f) rovnoběžky
    (g) elipsa, $S = (7, 5)$
    (h) hyperbola, $S = (1, -\frac{3}{5})$
    (i) parabola
    (j) rovnoběžky
19. $F(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_6^2 - x_7^2$
20. $F(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 - x_6^2 - x_7^2$
21. $f(\alpha A, B) = tr(\alpha A \cdot M \cdot B) = \alpha tr(A \cdot M \cdot B)$, analogicky $f(A, \alpha B) = \alpha f(A, B)$
    $f(A_1 + A_2, B) = tr((A_1 + A_2) \cdot M \cdot B) = tr(A_1 \cdot M \cdot B + A_2 \cdot M \cdot B) = tr(A_1 \cdot M \cdot B) + tr(A_2 \cdot M \cdot B) = f(A_1, B) + f(A_2, B)$, analogicky $f(A, B_1 + B_2) = f(A, B_1) + f(A, B_2)$
    Vektorový prostor má dimenzi 4, matice bilineární formy je proto matice řádu 4, jejíž prvky jsou dány vztahy $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, kde e_i, e_j jsou bázové vektory, např.

    $$a_{12} = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

    Matice formy pak je:

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. SKALÁRNÍ SOUČIN

1. (a) ne, (b) ne, (c) ano
2. (a) ano, (b) ne, (c) ne, (d) ano, (e) ano

3. (a) ano, (b) ne

4. (a) ne, (b) ne, (c) ne, (d) ano

5. (a) $\langle u, v\rangle = 13u_1v_1 + 5u_2v_2 - 8u_1v_2 - 8u_2v_1$
   (b) nelze, vektory u a v jsou lineárně závislé

6. vektory jsou lineárně nezávislé a jejich lineární obal je R^4, a tedy např. $\alpha = [(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T]$

7. $\alpha = [(1,0,4,-1)^T, (1,-4,0,1)^T, (-32,-7,9,4)^T]$, báze $W^\perp$ je $\beta = [(4,9,7,32)^T]$

8. $\alpha = [(1,1,-1,-1)^T, (3,-1,1,1)^T, (0,1,1,0)^T]$

9. (a) $\alpha = [(1,2,2,-1)^T, (2,3,-3,2)^T, (2,-1,-1,-2)^T]$
   (b) $\alpha = [(1,0,1,0)^T, (0,1,0,-7)^T]$
   (c) $\alpha = [(1,2,0,1,2)^T, (1,0,6,-1,0)^T]$
   (d) $\alpha = [(1,-1,0,1,1)^T, (3,-3,4,-1,-5)^T, (3,-18,-31,-11,-10)^T]$

10. (a) $(1,0,-1,1)^T$, $(-1,0,0,1)^T$
    (b) $(24,-2,2,9)^T$, $(0,1,1,0)^T$
    (c) $(-7,0,1,0)^T$, $(0,-1,0,7)^T$

11. $P_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = [1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}x]$

12. (a) $\alpha = [(1,0,-1,1,0)^T, (1,3,2,1,-3)^T]$
    (b) $\alpha = [(-1,5,3,0,0)^T, (0,1,0,1,0)^T, (1,-8,0,0,3)^T]$

13. $\alpha = \left[\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T\right]$

14. (a) $-1,\ -\frac{5}{3}$ (b) $-1 + \frac{1}{\sqrt{5}},\ -1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) žádné

15. $P^\perp = [(4,2,7,0)^T]$

16. (a) $W = [(1,1,1,1)^T, (-5,3,-3,5)^T]$
    (b) $a = -17$, $b = 13$

17. $(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T$

18. (a) $L^\perp = [(1,1,-1,-1)^T]$, $Pz = (2,2,-2,-2)^T$

(b) $L^{\perp} = [(4,2,1,-1)^T]$, $Pz = (4,2,1,-1)^T$

19. (a) $Pu = (-1,1,-2,3)^T$
(b) $Pu = (0,0,0,0)^T$
(c) $Pu = (0,3,0,3)^T$
(d) $Pu = (1,-1,-1,5)^T$

20. Budeme počítat druhou mocninu velikosti vektoru $u - v$:

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 .$$

Z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti víme, že $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$. Protože v naši rovnici $\langle u,v\rangle$ odčítáme, bude platit

$$\|u-v\|^2 \ge \|u\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2$$

a tedy $\|u-v\|^2 \ge (\|u\| - \|v\|)^2$, tj. $|\,\|u\| - \|v\|\,| \le \|u-v\|$

21. Stačí zvolit vektorový prostor $V = R^n$ se standardním skalárním součinem a vektory $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ a $y = (1,1,\dots,1) \in R^n$. Pro tyto dva vektory musí platit Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

$$\text{z toho plyne}\quad 1\,x_1 + 1\,x_2 + \dots + 1\,x_n \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}\,\sqrt{n}\,,$$

$$\text{a tedy}\quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

22. Zvolíme za vektorový prostor množinu všech spojitých funkcí na intervalu (a,b), značíme $C[a,b]$, se skalárním součinem definovaným

$$\text{pro}\quad f,g \in C[a,b]\quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

zvolíme dvě funkce $f = f(x)$ a $g = 1$, pro které musí platit Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$$

$$\text{z toho plyne}\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b 1\,dx}\,,$$

$$\text{a tedy}\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{b-a}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sqrt{\frac{1}{a-b}\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

23. Vezmeme-li dva vektory $(2,4)$, $(x,y) \in R^2$, platí pro ně Cauchyova-Schwarzova nerovnost
$$(2x+4y)^2 \leq (2^2+4^2)\,(x^2+y^2)\,.$$
Odtud pak už pro $2x+4y=1$ dostáváme požadovanou nerovnost.

24. Vezmeme-li dva vektory $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{3}}, \frac{z}{\sqrt{6}}) \in R^3$, dostaneme z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}\right),$$
což je požadovaná nerovnost.

25. Vezmeme vektory $\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{a_1}}\right)$, $\left(\sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots, \sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}\right) \in R^n$, pro které platí Cauchy-Schwarzova nerovnost
$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\sqrt{a_2} + \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\sqrt{a_3} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_1}}\sqrt{a_1}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\dots+\frac{a_n^2}{a_1}\right)(a_1+a_2+\dots+a_n)\,,$$
což je požadovaný výsledek.

26. Vezmeme vektory $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$, $\left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}\right) \in R^n$, pro které platí Cauchy-Schwarzova nerovnost
$$n^2 \leq \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\dots+a_n)\,.$$

27. $F = F_1+F_2+F_3+F_4$, potom
$|F|^2 = \langle F,F\rangle = |F_1|^2+|F_2|^2+|F_3|^2+|F_4|^2+2\langle F_1,F_2\rangle+2\langle F_1,F_3\rangle+2\langle F_1,F_4\rangle+2\langle F_2,F_3\rangle++2\langle F_2,F_4\rangle+\langle F_3,F_4\rangle$
(a) $|F|^2 = 100(6+3\sqrt{3})$
(b) $|F|^2 = 100(4+2\sqrt{2})$

28. $25 = \langle (F_1{+}F_2{+}F_3), (F_1{+}F_2{+}F_3)\rangle = |F_1|^2{+}|F_2|^2{+}|F_3|^2{+}2\left(\langle F_1,F_2\rangle+\langle F_1,F_3\rangle+\langle F_2,F_3\rangle\right) = $
$= 4+9+16+2(6+8+12)\cos\alpha$, pak $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{13}\right)$.

4. EUKLIDOVSKÁ ANALYTICKÁ GEOMETRIE - VZDÁLENOST A ÚHEL

1. (a) $\rho(A,P)=5$, (b) $\rho(A,P)=6$, (c) $\rho(A,P)=7$, (d) $\rho(A,P)=(\frac{581}{27})^{\frac{1}{2}}$ (e) $\rho(R,B)=\sqrt{3}$, (f) $\rho(R,B)=2\sqrt{30}$, (g) $\rho(R,B)=5$, (h) $\rho(R,B)=\sqrt{11}$

2. (a) $\rho(p,q)=7$, (b) $\rho(p,q)=13$, (c) $\rho(p,q)=5$, (d) $\rho(p,q)=6$, (e) $\rho(p,q)=10$

3. (a) $\rho(p, \tau) = 5$, (b) $\rho(p, \tau) = 5$, (c) $\rho(p, \tau) = 3$
4. (a) $\rho(\tau, \sigma) = 7$, (b) $\rho(\tau, \sigma) = 10$, (c) $\rho(\tau, \sigma) = 5$, (d) $\rho(\tau, \sigma) = 0$, (e) $\rho(\tau, \sigma) = 7$,
5. $\rho(\tau, P) = 6$
6. (a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, (c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (d) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, (e) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (f) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, (g) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (h) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (i) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (j) $\alpha = \frac{\pi}{3}$
7. (a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, (b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$
8. (a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, (b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, (c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$,
9. $Q = (3, 2, 1, 2)$
10. $Q = (2, 5, -3)$
11. $C = (1, 0, 1, 0, 1) + t(19, 11, -4, 5, 1) + s(7, 2, 0, 1, 0)$
12. $C : 7x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 15,\ 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5$
13. $q = (2, 1, -3) + t(-8, -9, 6)$
14. 2 řešení: $\rho_1 : 3x - 6y - 2z - 7 = 0$, resp. $\rho_2 : 3x - 6y - 2z + 35 = 0$
15. $\rho_1 : 2x - 2y - z - 22 = 0$, resp. $\rho_2 : 2x - 2y - z + 8 = 0$
16. nekonečně mnoho bodů ležících na přímce $q : (6, -1, 0) + t(2, 2, 0)$
17. $x - y + z - a$
18. $Q_1 = (2, -3, -3)^T$, $Q_2 = (-2, 5, 9)^T$
19. $Q_1 = (15, 0, -12)^T$, $Q_2 = (15, 2, -10)^T$
20. $15x + 10y - 10z - 8 = 0$
21. Lze odvodit
$$\rho(A, N) = \frac{|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

5. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY, ORTOGONÁLNÍ MATICE

1. (a) $\lambda_1 = -1$, $\alpha_1 = [(1, 1, -1)^T]$
   (b) $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = [(1, 2, 0)^T, (0, 0, 1)^T]$
   (c) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(1, 1, 1)^T]$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_2 = [(1, 2, 3)^T]$

(d) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(2,1,0)^T, (1,0,-1)^T]$, $\lambda_2 = -1$, $\alpha_2 = [(3,5,6)^T]$

(e) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(1,2,1)^T]$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\alpha_2 = [(3-3i, 5-3i, 4)^T]$, $\lambda_3 = 2-3i$, $\alpha_3 = [(3+3i, 5+3i, 4)^T]$

(f) $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = [(1,1,0,1)^T, (0,0,1,1)^T]$

(g) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(1,1,1)^T]$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_2 = [(1,1,0)^T, (1,0,-3)^T]$

(h) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(1,1,2)^T]$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\alpha_2 = [(-12+3i, -10-6i, 17)^T]$, $\lambda_3 = 2-3i$, $\alpha_3 = [(-12-3i, -10+6i, 17)^T]$

(i) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(1,1,2)^T]$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\alpha_2 = [(3-3i, 4, 5-3i)^T]$, $\lambda_3 = 2-3i$, $\alpha_3 = [(3+3i, 4, 5+3i)^T]$

(j) $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = [(1,1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T, (1,0,0,1)^T]$, $\lambda_2 = -2$, $\alpha_1 = [(1,-1,-1,-1)^T]$

2. (a) R^3, (b) $\alpha = [(1,0,0)^T, (0,0,1)^T]$, (c) $\alpha = [(1,0,0)^T]$

3. (a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, je diagonální na Q, R, C

   (b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$, je diagonální na C

   (c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, není diagonální

4. (a) $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = [(-1,0,1)^T, (1,1,0)^T]$ $\lambda_2 = 3$, $\alpha_2 = [(-1,1,0)^T]$

   (b) $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1 = [(-2,1,0,0)^T, (-3,0,0,1)^T]$ $\lambda_2 = 2$, $\alpha_2 = [(0,0,1,0)^T, (1,-1,0,1)^T]$

5. (a) $\lambda_1 = -1$,$\alpha_1 = [(1,1,1)^T]$,algebraická násobnost je 1, geometrická násobnost je 1
   $\lambda_2 = 2$, $\alpha_2 = [(1,0,1)^T]$, algebraická násobnost je 2, geometrická násobnost je 1

   (b) $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = [(1,0,2)^T]$, algebraická násobnost je 1, geometrická násobnost je 1
   $\lambda_2 = 3$, $\alpha_2 = [(1,1,1)^T]$, algebraická násobnost je 2, geometrická násobnost je 1

   (c) $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1 = [(1,2,3)^T]$, algebraická násobnost je 2, geometrická násobnost je 1
   $\lambda_2 = 1$, $\alpha_2 = [(1,1,1)^T]$, algebraická násobnost je 1, geometrická násobnost je 1

   (d) $\lambda_1 = -1$, $\alpha_1 = [(2,0,0,1)^T, (0,1,0,0)^T]$, algebraická násobnost je 4, geometrická násobnost je 2

   (e) $\lambda_1 = 2$, $\alpha_1 = [(2,0,0,1)^T, (0,1,0,0)^T]$, algebraická násobnost je 4, geometrická násobnost je 2

6. (a) vlastní čísla nezávisí na parametrech: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$
   vlastní vektory závisí na parametrech: $\alpha_1 = [(1, 1, \frac{1}{3}(a+b))^T]$, $\alpha_2 = [(0,0,1)^T]$, $\alpha_3 = [(1, \frac{4}{3}, \frac{b}{3} - \frac{a}{4})^T]$

   (b) vlastní čísla závisí na parametrech: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2+a$, $\lambda_3 = -2$

7. Matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je ortogonální, jestiže platí $A \cdot A^T = E$, z toho plyne $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Matice A je pak tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

První matice reprezentuje otočení o úhel α, druhá složení překlopení podle osy x s otočením o úhel α.

8. $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T\right]$

$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, (0,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T\right]$

$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T\right]$

$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, (0,0,1)^T\right]$

$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}-1}{4} & -\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{4} & \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \end{pmatrix}$

$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = [\frac{1}{2}(1,1,1,-1)^T, \frac{1}{2}(1,1,-1,1)^T, \frac{1}{2}(1,-1,1,1)^T, \frac{1}{2}(-1,1,1,1)^T]$

$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = [\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T]$

$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T\right]$

$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{3}(-1,2,2)^T, \frac{1}{3}(2,2,-1)^T, \frac{1}{3}(-2,1,-2)^T\right]$

$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{3\sqrt{5}}{7} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{7\sqrt{2}}(3,5,-8)^T\right]$

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12(-2+7\sqrt{2})} & -\frac{1}{12\sqrt{42+28\sqrt{2}}} \\ 0 & \frac{1}{12\sqrt{42+28\sqrt{2}}} & \frac{1}{12(-2+7\sqrt{2})} \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, (0,0,-1)^T\right]$$

9. $$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T, (1,0,0)^T\right]$$

otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v rovině kolmé ke směru $(0,1,-1)^T$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, (0,0,1)^T\right]$$

otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ v rovině kolmé ke směru $(1,1,0)^T$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[(0,1,0)^T, (1,0,0)^T, (0,0,1)^T\right]$$

otočení o úhel $\arccos \frac{3}{5}$ v rovině kolmé ke směru $(0,1,0)^T$

10. $$A_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

11. $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. $$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

13. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

14. $$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

15. $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

16. Označme matici zobrazení G, matici prvního skalárního součinu A a druhého B, přičemž
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Má-li být zobrazení ortogonální, musí zachovávat skalární součin, musí tedy pro všechna $u, v \in R^3$ platit
$$\langle u, v\rangle = \langle \phi(u), \phi(v)\rangle$$
$$u^T \cdot A \cdot v = (G \cdot u)^T \cdot B \cdot (G \cdot v) = u^T \cdot (G^T \cdot B \cdot G) \cdot v$$
Volme např. matici druhého skalárního součinu jednotkovou a po patřičném vynásobení dostáváme matici
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
(Ověřte ještě axiomy skalárního součinu.)

6. SYMETRICKÉ MATICE A METRICKÁ KLASIFIKACE KUŽELOSEČEK

1. $$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T\right]$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(-\tfrac{2}{\sqrt{7}}, \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^T, \left(\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \tfrac{2}{\sqrt{7}}\right)^T\right]$$
$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^T\right]$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}\right)^T, (0,1,0)^T, \left(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}\right)^T\right]$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, (0,0,1)^T\right]$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T\right]$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[(0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T, \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}} 0, 0\right)^T\right]$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \left[\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0, 0\right)^T, \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0, 0\right)^T \left(0, 0, -\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)^T, \left(0, 0, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right)^T\right]$$

3. (a) hyperbola, střed $S = (3, -4)^T$, osy $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$
   kanonická rovnice: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

   (b) parabola, střed $S = (0, -1)^T$, osy $e_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^T, e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^T$
   kanonická rovnice: $y^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}x = 0$

   (c) rovnoběžky, střed $S = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$, osy $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$
   kanonická rovnice: $x^2 = 2$

4. (a) hyperbola, kanonická rovnice: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
   (b) elipsa, kanonická rovnice: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
   (c) hyperbola, kanonická rovnice: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$
   (d) různoběžky, kanonická rovnice: $x^2 - 4y^2 = 0$
   (e) prázdná množina, kanonická rovnice: $x^2 + 2y^2 = -1$
   (f) bod, kanonická rovnice: $2x^2 + 3y^2 = 0$
   (g) parabola, kanonická rovnice: $y^2 - 2x = 0$
   (h) rovnoběžky, kanonická rovnice: $x^2 = 1$
   (i) prázdná množina, kanonická rovnice: $y^2 = -1$

5. (a) elipsa o poloosách délky $a = 3$, $b = 1$

(b) elipsa o poloosách délky $a = 3$, $b = 2$

(c) hyperbola o poloosách délky $a = 2$, $b = 1$

(d) hyperbola o poloosách délky $a = 5$, $b = 1$

6. (a) parabola s parametrem $p = 3$

(b) parabola s parametrem $p = 3$

(c) parabola s parametrem $p = \sqrt{2}$

(d) parabola s parametrem $p = \frac{\sqrt{10}}{2}$

7. (a) hyperbola, délky poloos: $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, střed: $S = (0,0)^T$

(b) elipsa, délky poloos: $a = 4$, $b = 2$, střed: $S = (0,0)^T$

(c) parabola, parametr: $p = 1$, vrchol: $V = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^T$

(d) různoběžky, střed: $S = (2,-3)^T$

(e) elipsa, délky poloos: $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, střed: $S = (0,0)^T$

(f) elipsa, délky poloos: $a = 2$, $b = 1$, střed: $S = (0,0)^T$

(g) hyperbola, délky poloos: $a = 1$, $b = 1$, střed: $S = (0,0)^T$

8. $\alpha = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^T, \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T\right]$

9. $\alpha = \left[(0,0,1)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T\right]$

7. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

1. $J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $J_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$ $J_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $J_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $J_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Báze, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar, není dána jednoznačně. Báze uvedená v řešení tohoto příkladu je tedy pouze příkladem takové báze. $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\alpha = \left[(1,4,3)^T, (1,0,0)^T, (3,0,1)^T\right]$

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \big[(1,-3,-2)^T, (1,0,0)^T, (1,0,1)^T\big]$$

$$J_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \big[(1,1,1,1)^T, (-1,0,0,0)^T, (1,1,0,0)^T, (0,0,-1,0)^T\big]$$

$$J_D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \big[(-1,-1,-1,0)^T, (2,1,0,0)^T, (1,0,0,-1)^T, (3,6,7,1)^T\big]$$

3. $$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad J_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad J_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad J_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad J_I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Nebereme-li v úvahu pořadí Jordanových buněk, je Jordanových kanonických tvarů celkem 7. (1 buňka - 5x5, 2 buňky - 1x1 a 4x4, nebo 2x2 a 3x3, 3 buňky - 1x1, 1x1 a 3x3, nebo 1x1,2x2 a 2x2, 4 buňky - 1x1, 1x1, 1x1, 2x2, 5 buněk)

6. Nebereme-li v úvahu pořadí Jordanových buněk, je Jordanových kanonických tvarů celkem 21.