

Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Diferenciální počet

Příklad 2.1

Určete suprema a infima následujících množin:

- (i) $A = (-3, 2] \cup \{7\}$,
- (ii) $B = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$,
- (iii) $C = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

$$\begin{aligned}\sup A &= 7, \\ \inf A &= -3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup B &= 1, \\ \inf B &= 1/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup C &= 1, \\ \inf C &= -1.\end{aligned}$$

Příklad 2.1

Určete suprema a infima následujících množin:

- (i) $A = (-3, 2] \cup \{7\}$,
- (ii) $B = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (iii) $C = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Obrázek – viz *přílohu*.

Řešení

$$\begin{aligned}\sup A &= 7, \\ \inf A &= -3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup B &= 1, \\ \inf B &= 1/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup C &= 1, \\ \inf C &= -1.\end{aligned}$$

Příklad 2.1

Určete suprema a infima následujících množin:

(i) $A = (-3, 2] \cup \{7\}$,

(ii) $B = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$,

(iii) $C = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Obrázek – viz *přílohu*.

Řešení

$$\sup A = 7,$$

$$\inf A = -3,$$

$$\sup B = 1,$$

$$\inf B = 1/2,$$

$$\sup C = 1,$$

$$\inf C = -1.$$

Příklad 2.2

Určete limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

1, 1.

Příklad 2.2

Určete limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

$$1, \quad 1.$$

Příklad 2.2

Určete limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

Obrázek – viz *přílohu*.

Řešení

$$1, \quad 1.$$

Příklad 2.3

Spočtěte limity posloupností:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n},$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n),$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 - 4n}{2^n + 3^n + n^2}.$$

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

1/2, 1/2, 1.

Příklad 2.3

Spočtěte limity posloupností:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n},$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n),$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 - 4n}{2^n + 3^n + n^2}.$$

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

1/2, 1/2, 1.

Příklad 2.3

Spočtěte limity posloupností:

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2}{4n^3 - n},$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n),$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 - 4n}{2^n + 3^n + n^2}.$$

Obrázek – viz přílohu.

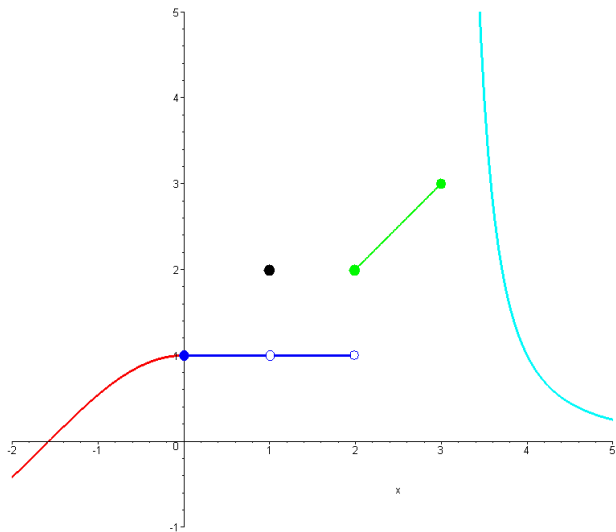
Řešení

$$1/2, \quad 1/2, \quad 1.$$

Příklad 2.4

Určete, zda je daná funkce spojitá/spojitá zleva/spojitá zprava v bodech $-\pi/2, 0, 1, 2, 3, 4$. Jestliže je nespojitá, určete druh nespojitosti.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0, \\ 1 & 0 \leq x < 1, \\ 2 & x = 1, \\ 1 & 1 < x < 2, \\ x & 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{(x-3)^2} & x > 3. \end{cases}$$



Obrázek: Body nespojitosti

Příklad 2.5

Spočtete limity (víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$):

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x},$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2},$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x},$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Řešení

5/7, $\pi/2$, 1, 5, neexistuje, 1.

Příklad 2.5

Spočtěte limity (víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$):

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x},$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2},$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x + \sin x}{2x + \cos x},$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2},$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x},$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Řešení

5/7, $\pi/2$, 1, 5, neexistuje, 1.

Příklad 2.6

Je dána funkce

$$f(x) = \frac{\ln(2x^3 + 4x^2 - x)}{1 + x}.$$

Určete rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1, f(1)]$.

Obrázek – viz přílohu.

Řešení

$$t: y - \frac{\ln 5}{2} = \left(\frac{13}{10} - \frac{\ln 5}{4} \right) (x - 1),$$

$$n: y - \frac{\ln 5}{2} = \frac{20}{5 \ln 5 - 26} (x - 1).$$

Příklad 2.6

Je dána funkce

$$f(x) = \frac{\ln(2x^3 + 4x^2 - x)}{1 + x}.$$

Určete rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1, f(1)]$.

Obrázek – viz *přílohu*.

Řešení

$$t: y - \frac{\ln 5}{2} = \left(\frac{13}{10} - \frac{\ln 5}{4} \right) (x - 1),$$

$$n: y - \frac{\ln 5}{2} = \frac{20}{5 \ln 5 - 26} (x - 1).$$

Příklad 2.6

Je dána funkce

$$f(x) = \frac{\ln(2x^3 + 4x^2 - x)}{1 + x}.$$

Určete rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[1, f(1)]$.

Obrázek – viz *přílohu*.

Řešení

$$t: y - \frac{\ln 5}{2} = \left(\frac{13}{10} - \frac{\ln 5}{4} \right) (x - 1),$$

$$n: y - \frac{\ln 5}{2} = \frac{20}{5 \ln 5 - 26} (x - 1).$$