

Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Diferenciální počet

Příklad 3.1

Spočtěte derivace následujících funkcí:

(i)

$$\sin[\ln(x^3 + 2x)],$$

(ii)

$$\cotg(e^{(x^2+1)\sin x}).$$

Řešení

$$\frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} \cos[\ln(x^3 + 2x)],$$

$$-\frac{2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x}{\sin^2(e^{(x^2+1)\sin x})} e^{(x^2+1)\sin x}.$$

Příklad 3.1

Spočtěte derivace následujících funkcí:

(i)

$$\sin[\ln(x^3 + 2x)],$$

(ii)

$$\cotg(e^{(x^2+1)\sin x}).$$

Řešení

$$\frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} \cos[\ln(x^3 + 2x)], \quad -\frac{2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x}{\sin^2(e^{(x^2+1)\sin x})} e^{(x^2+1)\sin x}.$$

Příklad 3.2

Hyperbolické funkce jsou dány takto:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Určete derivace těchto funkcí:

- Pomocí definice derivace.
- Přímým výpočtem.

Řešení

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$(\cosh x)' = \sinh x,$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}.$$

Příklad 3.2

Hyperbolické funkce jsou dány takto:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Určete derivace těchto funkcí:

- Pomocí definice derivace.
- Přímým výpočtem.

Řešení

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$(\cosh x)' = \sinh x,$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}.$$

Příklad 3.3

Pomocí inverzní funkce najděte derivaci funkcí

$\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

Řešení

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 3.3

Pomocí inverzní funkce najděte derivaci funkcí

$$\operatorname{argsinh} x, \quad \operatorname{argcosh} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x.$$

Řešení

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 3.4

Určete derivace následujících funkcí ($x > 0$):

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{\sin x}$$

Řešení

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1),$$
$$g'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Příklad 3.4

Určete derivace následujících funkcí ($x > 0$):

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{\sin x}$$

Řešení

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1),$$
$$g'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Příklad 3.5

Následující limity jsou (po řadě) následujících typů:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Jejich typ ověřte a spočtěte je.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)},$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}},$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x},$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right),$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi}{2}x\right)^{\ln x}.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \ln(x-1)],$$

Řešení

$$(i) -\frac{2}{\pi},$$

$$(iii) \frac{1}{2},$$

$$(v) \frac{1}{e},$$

$$(vii) 1.$$

$$(ii) 0,$$

$$(iv) 0,$$

$$(vi) e^{-\frac{1}{6}},$$

Příklad 3.5

Následující limity jsou (po řadě) následujících typů:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Jejich typ ověřte a spočtěte je.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)},$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}},$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x},$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right),$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow 1^-} (\cos \frac{\pi}{2}x)^{\ln x}.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \ln(x-1)],$$

Řešení

$$(i) -\frac{2}{\pi},$$

$$(iii) \frac{1}{2},$$

$$(v) \frac{1}{e},$$

$$(vii) 1.$$

$$(ii) 0,$$

$$(iv) 0,$$

$$(vi) e^{-\frac{1}{6}},$$

Příklad 3.6

Pohyb tělesa (hmotného bodu) je popsán funkcí

$$s(t) = -(t - 3)^2 + 16, \quad [m/s].$$

Určete:

- (i) Počáteční rychlost tělesa (v čase $t_0 = 0$).
- (ii) Čas a polohu, ve které se těleso zastaví.
- (iii) Rychlost, zrychlení a polohu tělesa 1 s po zastavení.
- (iv) Čas, ve kterém se těleso vrátí do počáteční pozice.

Řešení

(i) 6,

(iii) -2, -2, 15,

(ii) 3, 16,

(iv) 6.

