Demonstrované cvičení - Matematika II

Petr Hasil

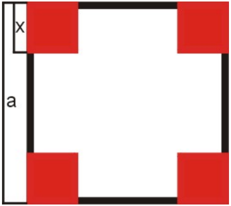
hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Diferenciální počet

Příklad 5.1

Je dán čtverec papíru. Z každého rohu odstraňte menší čtvereček tak, aby krabička poskládaná ze zbytku papíru měla maximální objem – viz obrázek a animace 01, 02, 03.

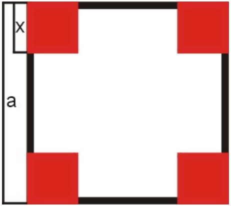


Řešení

$$x = \frac{a}{6}, \quad V = \frac{2a^3}{27}.$$

Příklad 5.1

Je dán čtverec papíru. Z každého rohu odstraňte menší čtvereček tak, aby krabička poskládaná ze zbytku papíru měla maximální objem – viz obrázek a animace 01, 02, 03.



Řešení

$$x = \frac{a}{6}, \quad V = \frac{2a^3}{27}.$$

Příklad 5.2

Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

Řešení

$$4, \quad 24.$$

Příklad 5.2

Číslo 28 rozložte na 2 nezáporné sčítance tak, aby součet druhé mocniny prvního sčítance a třetí mocniny druhého sčítance byl minimální.

Řešení

$$4, \quad 24.$$

Příklad 5.3

Vepište do půlkružnice (poloměr r) obdélník o:

(i) největším možném obsahu,

(ii) největším možném obvodu.

Příslušný obsah a obvod určete.

Ilustrovaný postup řešení k bodu (i) najdete zde.

Řešení

(i) $a = \sqrt{2}r, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad S = r^2,$

(ii) $a = \frac{4\sqrt{5}}{5}r, \quad b = \frac{2\sqrt{5}}{5}r, \quad O = 2\sqrt{5}r.$

Příklad 5.3

Vepište do půlkružnice (poloměr r) obdélník o:

(i) největším možném obsahu,

(ii) největším možném obvodu.

Příslušný obsah a obvod určete.

Ilustrovaný postup řešení k bodu (i) najdete zde.

Řešení

(i) $a = \sqrt{2}r, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad S = r^2,$

(ii) $a = \frac{4\sqrt{5}}{5}r, \quad b = \frac{2\sqrt{5}}{5}r, \quad O = 2\sqrt{5}r.$

Příklad 5.3

Vepište do půlkružnice (poloměr r) obdélník o:

(i) největším možném obsahu,

(ii) největším možném obvodu.

Příslušný obsah a obvod určete.

Ilustrovaný postup řešení k bodu (i) najdete zde.

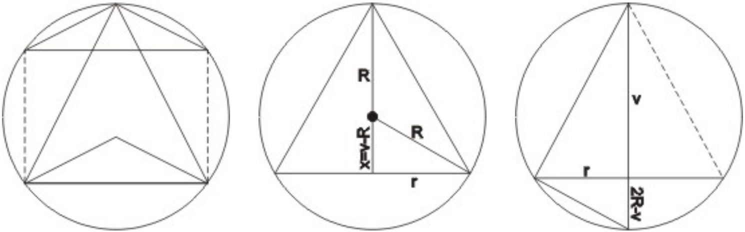
Řešení

(i) $a = \sqrt{2}r, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad S = r^2,$

(ii) $a = \frac{4\sqrt{5}}{5}r, \quad b = \frac{2\sqrt{5}}{5}r, \quad O = 2\sqrt{5}r.$

Příklad 5.4

Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R.

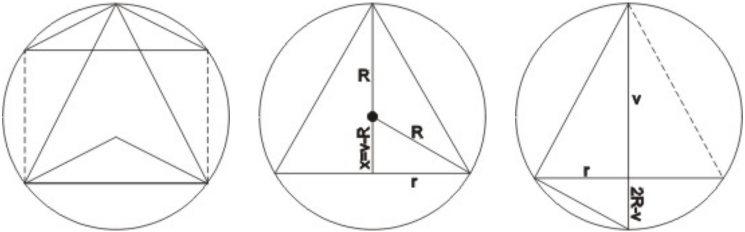


Řešení

$$v = \frac{4}{3}R, \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

Příklad 5.4

Zjistěte výšku v a poloměr podstavy r nejobjemnějšího kužele, který se vejde do koule o poloměru R.



Řešení

$$v = \frac{4}{3}R, \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

Příklad 5.5

V továrně na výrobu kalkulaček zjistili, že pokud vyjádří výnos a náklady jako funkce proměnné x reprezentující počet kalkulaček (v tisících denně), obdrží funkce:

$$r(x) = 9x \text{ (výnos)}, \qquad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \text{ (náklady)}.$$

Určete, při jakém objemu výroby bude mít továrna největší zisky.

Řešení

Největší zisky bude mít při výrobě 3 414 kalkulaček denně.

Příklad 5.5

V továrně na výrobu kalkulaček zjistili, že pokud vyjádří výnos a náklady jako funkce proměnné x reprezentující počet kalkulaček (v tisících denně), obdrží funkce:

$$r(x) = 9x \textit{ (výnos)}, \qquad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \textit{ (náklady)}.$$

Určete, při jakém objemu výroby bude mít továrna největší zisky.

Řešení

Největší zisky bude mít při výrobě 3 414 kalkulaček denně.

Příklad 5.6

Chceme přestěhovat žebřík z chodby široké p stop pravoúhlou zatáčkou do chodby široké q stop. Jaký nejdelší žebřík proneseme ve vodorovné poloze?

Ilustrovaný postup řešení najdete zde.

Řešení

$$\text{Maximální délka} = (p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Příklad 5.6

Chceme přestěhovat žebřík z chodby široké p stop pravoúhlou zatáčkou do chodby široké q stop. Jaký nejdelší žebřík proneseme ve vodorovné poloze?

Ilustrovaný postup řešení najdete zde.

Řešení

$$\text{Maximální délka} = (p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Příklad 5.6

Chceme přestěhovat žebřík z chodby široké p stop pravoúhlou zatáčkou do chodby široké q stop. Jaký nejdelší žebřík proneseme ve vodorovné poloze?

Ilustrovaný postup řešení najdete zde.

Řešení

$$\text{Maximální délka } = (p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Příklad 5.7

Určete Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě 1 funkce $f(x) = 1/x$. Určete také tvar zbytku.

Řešení

$$T_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 5,$$

$$R_4(x) = \frac{-1}{c^6}(x-1)^5.$$

Příklad 5.7

Určete Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě 1 funkce $f(x) = 1/x$. Určete také tvar zbytku.

Řešení

$$T_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 5,$$
$$R_4(x) = \frac{-1}{c^6}(x-1)^5.$$