

# Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

# Integrální počet

## Příklad 7.1

Použitím základních vzorců určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

$$(i) \quad f(x) = x^2(5 - x)^3,$$

$$(iii) \quad h(x) = (2^x + 3^x)^2,$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}},$$

$$(iv) \quad k(x) = 1 + \sin x + \cos x.$$

## Řešení

$$(i) \quad \frac{-1}{6}x^6 + 3x^5 - \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{3}x^3 + c,$$

$$(iii) \quad \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c,$$

$$(ii) \quad \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c,$$

$$(iv) \quad x - \cos x + \sin x + c.$$

## Příklad 7.1

Použitím základních vzorců určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

$$(i) \quad f(x) = x^2(5 - x)^3,$$

$$(iii) \quad h(x) = (2^x + 3^x)^2,$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}},$$

$$(iv) \quad k(x) = 1 + \sin x + \cos x.$$

## Řešení

$$(i) \quad \frac{-1}{6}x^6 + 3x^5 - \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{3}x^3 + c, \quad (iii) \quad \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c,$$

$$(ii) \quad \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c,$$

$$(iv) \quad x - \cos x + \sin x + c.$$

## Příklad 7.2

Integrujte per-partes:

(i)

$$\int x \sin x \, dx,$$

(ii)

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

## Řešení

$$(i) \sin x - x \cos x + c,$$

$$(ii) e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

## Příklad 7.2

Integrujte per-partes:

(i)

$$\int x \sin x \, dx,$$

(ii)

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

## Řešení

$$(i) \sin x - x \cos x + c,$$

$$(ii) e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

## Příklad 7.3

Integrujte per-partes:

(i)

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

## Řešení

$$(i) \quad x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c,$$

$$(ii) \quad \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

## Příklad 7.3

Integrujte per-partes:

(i)

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

## Řešení

$$(i) \quad x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c,$$

$$(ii) \quad \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$



## Příklad 7.4

Integrujte užitím substituční metody:

(i)

$$\int (2x + 5)^{10} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\ln x}{x} dx,$$

(iii)

$$\int \sin \sqrt{x} dx.$$

Řešení

$$(i) \frac{(2x + 5)^{11}}{22} + c, \quad (ii) \frac{\ln^2 x}{2} + c, \quad (iii) 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + c.$$

## Příklad 7.4

Integrujte užitím substituční metody:

(i)

$$\int (2x + 5)^{10} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\ln x}{x} dx,$$

(iii)

$$\int \sin \sqrt{x} dx.$$

## Řešení

$$(i) \frac{(2x + 5)^{11}}{22} + c, \quad (ii) \frac{\ln^2 x}{2} + c, \quad (iii) 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + c.$$

## Příklad 7.5

Integrujte užitím substituční metody:

(i)

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Řešení

$$(i) \frac{-1}{\ln x} + c, \quad (ii) (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + c.$$

## Příklad 7.5

Integrujte užitím substituční metody:

(i)

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

## Řešení

$$(i) \frac{-1}{\ln x} + c, \quad (ii) (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + c.$$

## Příklad 7.6

Integrujte:

(i)

$$\int x^n \ln x \, dx, \quad n \neq -1,$$

(ii)

$$\int \frac{x}{1+x^4} \, dx.$$

Řešení

$$(i)[pp] \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c, \quad (ii)[subst] \frac{\arctg x^2}{2} + c.$$

## Příklad 7.6

Integrujte:

(i)

$$\int x^n \ln x \, dx, \quad n \neq -1,$$

(ii)

$$\int \frac{x}{1+x^4} \, dx.$$

## Řešení

$$(i) [pp] \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c, \quad (ii) [subst] \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + c.$$

## Příklad 7.7

Integrujte:

(i)

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx.$$

(ii)

$$\int x e^{-x} \, dx,$$

Řešení

$$(i) [\textit{subst}] \sin^{3/2} x \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) + c, \quad (ii) [\textit{pp}] -e^{-x}(x+1) + c.$$

## Příklad 7.7

Integrujte:

(i)

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx.$$

(ii)

$$\int x e^{-x} \, dx,$$

## Řešení

$$(i) [subst] \sin^{3/2} x \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) + c, \quad (ii) [pp] -e^{-x}(x+1) + c.$$



## Příklad 7.8

Integrujte racionální lomené funkce:

(i)

$$\int \frac{3}{x-2} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{3}{(x-2)^3} dx,$$

(iii)

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+8} dx,$$

(iv)

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+4x+8)^3} dx.$$

## Řešení

(i)

$$3 \ln |x - 2| + c,$$

(ii)

$$\frac{-3}{2(x-2)^2} + c,$$

(iii)

$$\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 8) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c,$$

(iv)

$$\frac{-3}{4(x^2 + 4x + 8)^2} - \frac{1}{32} \left[ \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t \right] + c,$$

kde

$$t = \frac{x+2}{2}.$$

## Příklad 7.9

Integrujte racionální lomené funkce:

(i)

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx.$$

Řešení

(i)

$$-\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c,$$

(ii)

$$\frac{\ln|x-1|}{3} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

## Příklad 7.9

Integrujte racionální lomené funkce:

(i)

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx,$$

(ii)

$$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx.$$

## Řešení

(i)

$$-\frac{1}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln |x - 1| + c,$$

(ii)

$$\frac{\ln |x - 1|}{3} - \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c.$$

## Příklad 7.10

Najděte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}.$$

## Řešení

$$\ln |\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \operatorname{arctg}(\ln x + 1) + c,$$

$$x \in (0, e) \cup (e, \infty).$$

## Příklad 7.10

Najděte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x(\ln^3 x + \ln^2 x - 2)}.$$

## Řešení

$$\ln |\ln x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + 3 \operatorname{arctg}(\ln x + 1) + c,$$

$$x \in (0, e) \cup (e, \infty).$$