

Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Integrální počet

Příklad 8.1

Je dána funkce $f(x) = x^2 - 3x + 5$ na intervalu $I = [2, 5]$.

- (i) Určete $s(D, f)$ a $S(D, f)$ pro dělení intervalu I vytvořené pomocí bodů 2, 5; 3; 4.
- (ii) Najděte primitivní funkci k funkci f .
- (iii) Je-li funkce f v Riemannově smyslu integrovatelná, pak tento integrál určete.
- (iv) Určete průměr funkce f .
- (v) Rozhodněte, zda fce f nabývá v I hodnoty svého průměru. Jestliže ano, pak tento bod určete.

Řešení

$$(i) s = 17,375; S = 28,375; \quad (ii) \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c;$$

$$(iii) 22,5; \quad (iv) 7,5; \quad (v) \frac{3+\sqrt{19}}{2}.$$

Příklad 8.1

Je dána funkce $f(x) = x^2 - 3x + 5$ na intervalu $I = [2, 5]$.

- (i) Určete $s(D, f)$ a $S(D, f)$ pro dělení intervalu I vytvořené pomocí bodů 2, 5; 3; 4.
- (ii) Najděte primitivní funkci k funkci f .
- (iii) Je-li funkce f v Riemannově smyslu integrovatelná, pak tento integrál určete.
- (iv) Určete průměr funkce f .
- (v) Rozhodněte, zda fce f nabývá v I hodnoty svého průměru. Jestliže ano, pak tento bod určete.

Řešení

$$(i) s = 17,375; S = 28,375; \quad (ii) \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c;$$

$$(iii) 22,5; \quad (iv) 7,5; \quad (v) \frac{3+\sqrt{19}}{2}.$$

Příklad 8.2

Udejte příklad funkce, pro kterou platí:

$$\int_{-1}^1 f(x) = -5, \quad \int_{-1}^1 = 4.$$

Řešení

Např.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2,5 & x \in \mathbb{I}, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x - 2,5 & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Příklad 8.2

Udejte příklad funkce, pro kterou platí:

$$\int_{-1}^1 f(x) = -5, \quad \int_{-1}^1 = 4.$$

Řešení

Např.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2,5 & x \in \mathbb{I}, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x - 2,5 & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Příklad 8.3

Je dána funkce $f(x) = |x|$ na intervalu $I = [-1, 1]$ a dělení

$$D_n = \left\{ -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Určete $s(D_n, f)$ a $S(D_n, f)$.

Řešení

$$s = \frac{n-1}{n}, \quad S = \frac{n+1}{n}.$$

Příklad 8.3

Je dána funkce $f(x) = |x|$ na intervalu $I = [-1, 1]$ a dělení

$$D_n = \left\{ -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Určete $s(D_n, f)$ a $S(D_n, f)$.

Řešení

$$s = \frac{n-1}{n}, \quad S = \frac{n+1}{n}.$$

Příklad 8.4

Spočtěte:

(i) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx,$

(ii) $\int_1^2 x\sqrt{1+x^2} \, dx,$

(iii) $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} \, dx.$

Řešení

$$(i) \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}, \quad (ii) \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}), \quad (iii) \frac{\pi + 2}{4}.$$

Příklad 8.4

Spočtěte:

$$(i) \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$(ii) \int_1^2 x \sqrt{1+x^2} \, dx,$$

$$(iii) \int_0^1 \sqrt{2-x^2} \, dx.$$

Řešení

$$(i) \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}, \quad (ii) \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}), \quad (iii) \frac{\pi + 2}{4}.$$

Příklad 8.5

Spočtěte:

(i)

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx,$$

(ii)

$$\int \sin^5 x \, dx,$$

(iii)

$$\int e^{-x^3} x^2 \, dx.$$

Řešení

$$(i) \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C, \quad (ii) -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C, \quad (iii) -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C.$$

Příklad 8.5

Spočtěte:

(i)

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx,$$

(ii)

$$\int \sin^5 x \, dx,$$

(iii)

$$\int e^{-x^3} x^2 \, dx.$$

Řešení

$$(i) \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c, \quad (ii) -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + c, \quad (iii) -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c.$$

Příklad 8.6

Spočtěte:

(i)

$$\int \cos^3 x \sin x \, dx,$$

(ii)

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} \, dx,$$

(iii)

$$\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} \, dx.$$

Řešení

$$(i) -\frac{\cos^4 x}{4} + c, \quad (ii) \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} + c, \quad (iii) x - \sin x + c.$$

Příklad 8.6

Spočtěte:

(i)

$$\int \cos^3 x \sin x \, dx,$$

(ii)

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} \, dx,$$

(iii)

$$\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} \, dx.$$

Řešení

$$(i) -\frac{\cos^4 x}{4} + c, \quad (ii) \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} + c, \quad (iii) x - \sin x + c.$$

Příklad 8.7

Spočtěte:

(i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx,$$

(iii)

$$\int_0^1 x(2 - x^2)^5 \, dx,$$

(ii)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{e^x} \, dx,$$

(iv)

$$\int_1^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}.$$

Řešení

$$(i) 1, \quad (ii) \frac{1 - \ln 2}{2}, \quad (iii) \frac{63}{12}, \quad (iv) 4.$$

Příklad 8.7

Spočtěte:

(i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx,$$

(iii)

$$\int_0^1 x(2 - x^2)^5 \, dx,$$

(ii)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{e^x} \, dx,$$

(iv)

$$\int_1^{e^8} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}.$$

Řešení

$$(i) 1, \quad (ii) \frac{1 - \ln 2}{2}, \quad (iii) \frac{63}{12}, \quad (iv) 4.$$