

# Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

# Integrální počet

## Příklad 9.8

Vyřešte:

- (a) Určete plochu pod grafem funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ , na intervalu  $[2, \infty)$ .
- (b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu  $[2, \infty)$  grafy funkcí  $f$  a  $g$ , kde

$$f(x) = (x+1) \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b) \quad \frac{2}{3} \ln 2.$$

## Příklad 9.8

Vyřešte:

- (a) Určete plochu pod grafem funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ , na intervalu  $[2, \infty)$ .
- (b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu  $[2, \infty)$  grafy funkcí  $f$  a  $g$ , kde

$$f(x) = (x+1) \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b) \quad \frac{2}{3} \ln 2.$$

## Příklad 9.8

Vyřešte:

- (a) Určete plochu pod grafem funkce  $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ , na intervalu  $[2, \infty)$ .
- (b) Určete obsah plochy ohraničené na intervalu  $[2, \infty)$  grafy funkcí  $f$  a  $g$ , kde

$$f(x) = (x+1) \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2},$$

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

Obrázky: (a), (b).

Řešení

$$(a, b) \quad \frac{2}{3} \ln 2.$$

## Příklad 10.1

Spočtěte:

(i)

$$\int_0^4 \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{x} dx,$$

(ii)

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} dx.$$

Řešení

$$(i) 20, \quad (ii) -\infty.$$

## Příklad 10.1

Spočtěte:

(i)

$$\int_0^4 \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{x} dx,$$

(ii)

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} dx.$$

Řešení

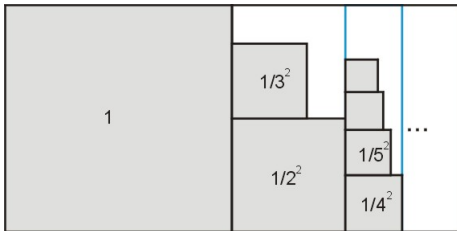
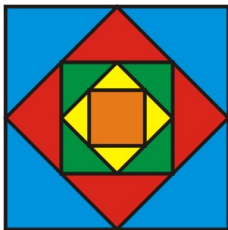
$$(i) 20, \quad (ii) -\infty.$$

# Nekonečné řady



## Příklad 10.2

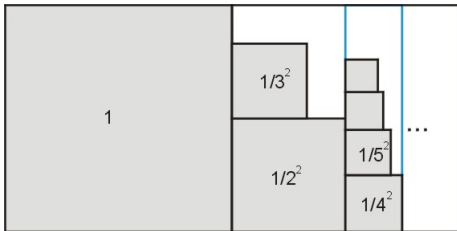
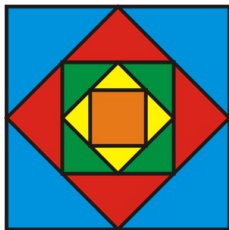
Dostali jsme pět metrů drátu a úkol sestojit z něj čtverec o délce strany čtvrt metru. Potom máme za úkol spojit drátem středy jeho sousedních stran, a tak vytvořit obrázek dvou čtverců. Postup máme opakovat do nekonečna (viz obrázek). Bude nám drát stačit? Pokud ano, kolik jej spotřebujeme? Jakou plochu naše čtverce pokryjí, jestliže je naskládáme vedle sebe?



*(Doporučení: Pro přehlednost výpočtů uvažujte původní čtverec o straně obecné délky  $a$  a dosadte až v závěru.)*

## Příklad 10.2

Dostali jsme pět metrů drátu a úkol sestavit z něj čtverec o délce strany čtvrt metru. Potom máme za úkol spojit drátem středy jeho sousedních stran, a tak vytvořit obrázek dvou čtverců. Postup máme opakovat do nekonečna (viz obrázek). Bude nám drát stačit? Pokud ano, kolik jej spotřebujeme? Jakou plochu naše čtverce pokryjí, jestliže je naskládáme vedle sebe?



*(Doporučení: Pro přehlednost výpočtů uvažujte původní čtverec o straně obecné délky  $a$  a dosadte až v závěru.)*

## Řešení

Spotřebujeme cca 3,41 metrů drátu. Plocha přesně  $12,5\text{dm}^2$ , tj. dvakrát plochu největšího čtverce.

## Příklad 10.3

Pomocí srovnávacího kritéria (tj. srovnáním s vhodnou řadou) zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

*(U tohoto a všech následujících příkladů ověřte nutnou podmínku konvergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ )*

Řešení

(i) ano, (ii) ne.

## Příklad 10.3

Pomocí srovnávacího kritéria (tj. srovnáním s vhodnou řadou) zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

*(U tohoto a všech následujících příkladů ověřte nutnou podmínku konvergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ )*

Řešení

(i) ano, (ii) ne.

## Příklad 10.3

Pomocí srovnávacího kritéria (tj. srovnáním s vhodnou řadou) zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

*(U tohoto a všech následujících příkladů ověřte nutnou podmínku konvergence  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ )*

Řešení

(i) ano,      (ii) ne.

## Příklad 10.4

Užitím integrálního kritéria zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

konverguje.

Řešení

Ano.

## Příklad 10.4

Užitím integrálního kritéria zjistěte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

konverguje.

## Řešení

Ano.



## Příklad 10.5

Užitím podílového kriteriya zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!},$$

(ii)

$$\sum_{n=25}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}.$$

Řešení

(i)ano, (ii)ne, (iii)ne.

## Příklad 10.5

Užitím podílového kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!},$$

(ii)

$$\sum_{n=25}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}.$$

Řešení

(i) ano, (ii) ne, (iii) ne.

## Příklad 10.6

Užitím odmocninového kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

Řešení

(i)ano, (ii)ano.

## Příklad 10.6

Užitím odmocninového kriteria zjistěte, zda daná řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

Řešení

(i) ano, (ii) ano.

## Příklad 10.7

Určete, zda daná řada konverguje. U řady (ii) navíc odhadněte chybu aproximace částečným součtem  $s_8$  a  $s_{9\,999}$ . Je zbytek po odečtení  $s_8$ , resp.  $s_{9\,999}$  kladný nebo záporný?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1},$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

## Řešení

Obě konvergují.  $s_8 : < 3/109$ , záporný;  $s_{9\,999} : < 1/101$ , kladný.

### Příklad 10.7

Určete, zda daná řada konverguje. U řady (ii) navíc odhadněte chybu aproximace částečným součtem  $s_8$  a  $s_{9\,999}$ . Je zbytek po odečtení  $s_8$ , resp.  $s_{9\,999}$  kladný nebo záporný?

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-1},$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

### Řešení

Obě konvergují.  $s_8 : < 3/109$ , záporný;  $s_{9\,999} : < 1/101$ , kladný.

## Příklad 10.8

Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right)^n,$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1},$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}.$$

Řešení

(i)abs.,

(ii)rel.,

(iii)abs. pro  $x \geq 0$ , jinak div.

## Příklad 10.8

Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right)^n,$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1},$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}.$$

## Řešení

(i)abs., (ii)rel., (iii)abs. pro  $x \geq 0$ , jinak div.



## Příklad 10.9

Určete poloměr a interval konvergence.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)8^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n,$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

Řešení

(i)  $8, [-8, 8)$ ;    (ii)  $0, \{5\}$ ;    (iii)  $1, [-4, 2]$ .

## Příklad 10.9

Určete poloměr a interval konvergence.

(i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)8^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n,$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

## Řešení

(i)  $8, [-8, 8)$ ;    (ii)  $0, \{5\}$ ;    (iii)  $1, [-4, 2]$ .