

Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

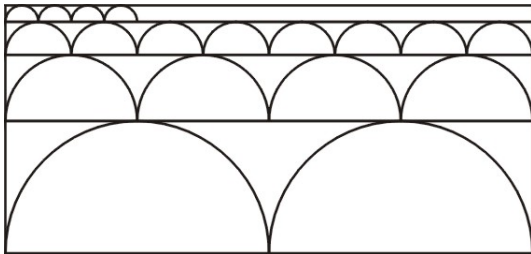
hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

Nekonečné řady

Příklad 11.1

Je dána posloupnost řádků půlkruhů, kde v n -tém řádku je 2^n půlkruhů o poloměru $\frac{1}{2^n}$ (viz obrázek). Určete plochu, kterou tyto půlkruhy pokrývají. Výsledek interpretujte vzhledem k obsahu největších (půl)kruhů.

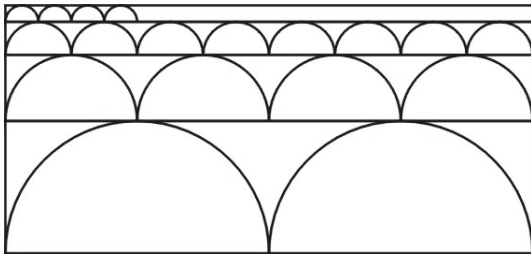


Řešení

$\pi/2$, tj. dvojnásobek plochy kruhu o poloměru $1/2$.

Příklad 11.1

Je dána posloupnost řádků půlkruhů, kde v n -tém řádku je 2^n půlkruhů o poloměru $\frac{1}{2^n}$ (viz obrázek). Určete plochu, kterou tyto půlkruhy pokrývají. Výsledek interpretujte vzhledem k obsahu největších (půl)kruhů.



Řešení

$\pi/2$, tj. dvojnásobek plochy kruhu o poloměru $1/2$.

Příklad 11.2

Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce $\sin x$ určete rozvoj funkce $\cos x$.

Řešení

$$\cos x = (\sin x)'$$

Příklad 11.2

Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce $\sin x$ určete rozvoj funkce $\cos x$.

Řešení

$$\cos x = (\sin x)'$$

Příklad 11.3

Ověřte pomocí Taylorova rozvoje, že $(e^x)' = e^x$.

Příklad 11.4

Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce e^x určete rozvoj funkcí e^{-x} , e^{x^2} .
Ověřte výsledek přímým výpočtem T. řad.

Příklad 11.3

Ověřte pomocí Taylorova rozvoje, že $(e^x)' = e^x$.

Příklad 11.4

Ze znalosti Taylorova rozvoje funkce e^x určete rozvoj funkcí e^{-x} , e^{x^2} .
Ověřte výsledek přímým výpočtem T. řad.

Příklad 11.5

Určete funkci, jejíž Taylorova řada je $(-1 \leq x \leq 1)$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Řešení

$\arctg x.$

Příklad 11.5

Určete funkci, jejíž Taylorova řada je $(-1 \leq x \leq 1)$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Řešení

$\operatorname{arctg} x.$

Příklad 11.6

Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Řešení

Konverguje absolutně.

Příklad 11.6

Určete, zda daná řada konverguje absolutně/relativně/nekonverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Řešení

Konverguje absolutně.

Příklad 11.7

Na intervalu konvergence $I = (-1, 1]$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Řešení

$$\ln(1+x) \cdot (x+1) - x.$$

Příklad 11.7

Na intervalu konvergence $I = (-1, 1]$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Řešení

$$\ln(1+x) \cdot (x+1) - x.$$

Příklad 11.8

Na intervalu konvergence $I = (-1, 1]$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Řešení

$$\ln(1+x) \cdot (x+1) - x.$$

Příklad 11.8

Na intervalu konvergence $I = (-1, 1]$ určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Řešení

$$\ln(1+x) \cdot (x+1) - x.$$

Příklad 11.9

Určete mocninou řadu, jejíž součet je roven výrazu

$$\frac{1}{x^2 - x - 12}.$$

(Řada k tomuto součtu konverguje na intervalu $I = (-3, 3)$.)

Řešení

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{21 \cdot 3^n} - \frac{1}{28 \cdot 4^n} \right] x^n.$$

Příklad 11.9

Určete mocninou řadu, jejíž součet je roven výrazu

$$\frac{1}{x^2 - x - 12}.$$

(Řada k tomuto součtu konverguje na intervalu $I = (-3, 3)$.)

Řešení

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{21 \cdot 3^n} - \frac{1}{28 \cdot 4^n} \right] x^n.$$

Příklad 11.10

Pomocí prvních dvou členů Taylorova polynomu určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{70}$.

Řešení

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{3}{32} \right) = 4 + \frac{1}{8} = 4,125.$$

(Přesná hodnota je 4,1212853.)

Příklad 11.10

Pomocí prvních dvou členů Taylorova polynomu určete přibližně hodnotu $\sqrt[3]{70}$.

Řešení

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{3}{32} \right) = 4 + \frac{1}{8} = 4,125.$$

(Přesná hodnota je 4,1212853.)

Příklad 11.11

Odhadněte kosinus deseti stupňů s přesností aspoň 10^{-5} .

Řešení

$$\cos \frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} \doteq 0,985.$$

Příklad 11.11

Odhadněte kosinus deseti stupňů s přesností aspoň 10^{-5} .

Řešení

$$\cos \frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} \doteq 0,985.$$

Elementární diferenciální rovnice

Příklad 11.12

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' = (2 - y) \operatorname{tg} x.$$

Řešení

$$y = 2 - K \cos x.$$

Příklad 11.12

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y' = (2 - y) \operatorname{tg} x.$$

Řešení

$$y = 2 - K \cos x.$$

Příklad 11.13

Určete řešení diferenciální rovnice

$$1 + y^2 - xy(1 + x^2)y' = 0.$$

Řešení

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = K\sqrt{1 + y^2}.$$

Příklad 11.13

Určete řešení diferenciální rovnice

$$1 + y^2 - xy(1 + x^2)y' = 0.$$

Řešení

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = K\sqrt{1 + y^2}.$$