

Demonstrováné cvičení - Matematika II

Petr Hasil

hasil@math.muni.cz

Podzimní semestr 2008

POZOR! – oprava příkladu

Příklad 12.1

Integrujte:

a)

$$\int \frac{7}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}} dx,$$

b)

$$\int \frac{7}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx.$$

Řešení

$$\text{a) } 7 \ln |2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x - 5}| + c,$$

$$\text{b) } 7 \arcsin \frac{x-2}{3} + c.$$

Příklad 12.1

Integrujte:

a)

$$\int \frac{7}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}} dx,$$

b)

$$\int \frac{7}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx.$$

Řešení

a) $7 \ln |2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x - 5}| + c,$

b) $7 \arcsin \frac{x-2}{3} + c.$

Elementární diferenciální rovnice

Příklad 12.2

Určete řešení diferenciální rovnice

$$yy' = \frac{\operatorname{arctg} x}{y^2 - 2y + 1}.$$

Řešení

$$3y^4 - 8y^3 + 6y^2 = 12x \operatorname{arctg} x - 6 \ln(1 + x^2) + K.$$

Příklad 12.2

Určete řešení diferenciální rovnice

$$yy' = \frac{\operatorname{arctg} x}{y^2 - 2y + 1}.$$

Řešení

$$3y^4 - 8y^3 + 6y^2 = 12x \operatorname{arctg} x - 6 \ln(1 + x^2) + K.$$

Příklad 12.3

Určete řešení diferenciální rovnice (vhodnou substitucí rovnici převedte na rovnici se sep. prom.)

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

Řešení

$$y = x e^{xK+1}.$$

Příklad 12.3

Určete řešení diferenciální rovnice (vhodnou substitucí rovnici převedte na rovnici se sep. prom.)

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

Řešení

$$y = x e^{x^k + 1}.$$

Příklad 12.4

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' + 2xy = x e^{-x^2}.$$

Řešení

$$y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + K \right).$$

Příklad 12.4

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' + 2xy = x e^{-x^2}.$$

Řešení

$$y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + K \right).$$

Příklad 12.5

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}.$$

Řešení

$$y = \frac{-1}{4x^2} + Kx^2.$$

Příklad 12.5

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}.$$

Řešení

$$y = \frac{-1}{4x^2} + Kx^2.$$

Příklad 12.6

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$2y' + y = x.$$

Řešení

$$y = x - 2 + Ke^{-\frac{x}{2}}.$$

Příklad 12.6

Určete řešení lineární diferenciální rovnice

$$2y' + y = x.$$

Řešení

$$y = x - 2 + K e^{-\frac{x}{2}}.$$

Příklad 12.7

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Řešení

$$c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Příklad 12.7

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Řešení

$$c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Příklad 12.8

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y^{(2)} = 0.$$

Řešení

$$c_1 + c_2x + c_3 e^{-3x} + c_4x e^{-3x}.$$

Příklad 12.8

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y^{(2)} = 0.$$

Řešení

$$c_1 + c_2x + c_3 e^{-3x} + c_4 x e^{-3x}.$$

Příklad 12.9

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 8y'' + 25y' + 26 = 0.$$

Řešení

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x.$$

Příklad 12.9

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 8y'' + 25y' + 26 = 0.$$

Řešení

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \cos 2x + c_3 e^{-3x} \sin 2x.$$

Příklad 12.10

Vodní nádrž o objemu 1000 litrů naobsahuje žádnou sůl. Do nádrže začneme připouštět solný roztok o koncentraci 50 gramů na litr rychlostí 20 litrů za minutu. Voda v nádrži je míchána a vypouštěna stejnou rychlostí jako připouštěna. Za jak dlouho dosáhne koncentrace soli v nádrži tří procent?

Řešení

Za cca 45,815 minut.

Příklad 12.10

Vodní nádrž o objemu 1000 litrů naobsahuje žádnou sůl. Do nádrže začneme připouštět solný roztok o koncentraci 50 gramů na litr rychlostí 20 litrů za minutu. Voda v nádrži je míchána a vypouštěna stejnou rychlostí jako připouštěna. Za jak dlouho dosáhne koncentrace soli v nádrži tří procent?

Řešení

Za cca 45,815 minut.