

Matematika II – 2. přednáška

Spojité funkce, limity

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 9. 2008

Obsah přednášky

- 1 Dokončení z minula – splajny, metoda nejmenších čtverců
 - Splajny
 - Aproximace
- 2 Reálná čísla
- 3 Limita posloupnosti a funkce
- 4 Spojitosť

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB102, e-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (rovněž na <http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf>).

Splajny

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.

Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.

Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o **intervalu** $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné (viz třeba koleje tramvají) a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně!

Kubický interpolační splajn

Definition

Nechť $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ jsou reálné (nebo racionální) hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty y_0, \dots, y_n . **Kubickým interpolačním splajnem** pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (neboť $S : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$), která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \dots, n$
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \dots, n$,
- $S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$,
- $S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$ pro všechny $i = 1, \dots, n-1$.

Kubický splajn pro $n + 1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n + (n - 1) + (n - 1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro první derivace v krajních bodech (tzv. **úplný splajn**) nebo jsou druhé derivace zadány jako nula (tzv. **přirozený splajn**). Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Výpočty splajnů jsou však základem takřka všech grafických balíčků pracujících s křivkami, proto je pochopení principu jejich fungování velmi důležité. Ti z vás, kteří tíhnou k počítačové grafice, se s tímto pojmem určitě ještě setkají.

Aproximace je rozdílem od interpolace postup, který bere ohled na to, že pracujeme s potenciálně nepřesnými vstupními daty, a nesnaží se proto *trifit* přesně do zadaných bodů, ale výstupem je funkce, která má ze zadané třídy funkcí (ve vhodném smyslu) nejmenší vzdálenost od zadaných bodů. Častým případem je rovněž situace, kdy řešíme tzv. **přeuročenu soustavu rovnic**, tj. máme více rovnic než neznámých (např. z výše uvedených důvodů nechceme aproximovat $n + 1$ daných bodů hodnotami polynomu stupně n ale stupně nižšího).

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je založena na tom, že hledáme funkci z dané množiny (např. lineární polynomy, kvadratické polynomy, polynomy stupně nejvýše n , ale i mnohé jiné funkce v závislosti na zvoleném modelu), jejíž hodnoty v daných bodech x_1, \dots, x_n mají nejmenší **součet druhých mocnin vzdáleností** od zadaných hodnot y_1, \dots, y_n .

Tato metoda se velmi často objevuje ve zejména ve statistice (regresní analýza).

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů ($[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$) a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

S pomocí odhadů nebo základních metod diferenciálního počtu (toho budeme schopni za několik týdnů) lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech x_1, \dots, x_n od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme \mathbb{R} . Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.

Připoměňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělicí čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, \mathbb{R} je pole, množina \mathbb{R} spolu s operacemi $+$, \cdot a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané pole** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že \mathbb{R} je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.

Zároveň si uvědomujme, které z axiomů platí pro \mathbb{Q} a \mathbb{C} .

(R1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$

(R2) $a + b = b + a$, pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$

(R3) existuje $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$

(R4) pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a + (-a) = 0$

(R5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$

(R6) $a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$

(R7) existuje $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$

(R8) pro každý $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$

(R9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$

(R10) relace \leq je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na \mathbb{R}

(R11) pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá $a + c \leq b + c$

(R12) pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, platí také $a \cdot b > 0$

(R13) každá neprázdna ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.

Nechť je dána neprázdňá množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

horní závorou množiny A , pokud $\forall x \in A : x \leq b$,

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A . Obdobně se definuje dolní závoru množiny A , tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Řekneme, že množina A je shora ohraničená (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje zdola ohraničená (zdola omezená) množina A . Množina A je ohraničená (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Nejmenší horní závoru množiny A se nazývá supremum množiny A .

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A , pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall x \in A : x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A , potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje infimum množiny A , neboli je to největší dolní závora množiny A , značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ nebo $(0, 1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b , potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$). Zatímco největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, supremum a infimum existují (v ohraničeném případě) vždy (jak je vidět z výše uvedeného axiomu R19).

Limita

V tomto odstavci se budeme podrobně zabývat situací, kdy se nějaké hodnoty funkce (nebo posloupnosti) *blíží* k nějakému číslu či k $\pm\infty$. To pak přirozeně vede k zavedení pojmu *limita*.

Příklad

K přiblížení pojmu *limita* může dobře posloužit již známý pojem infima či suprema. Zřejmě je $0 = \inf(0, 1)$, $1 = \sup(0, 1)$, a přitom ani jedno z čísel $0, 1$ v množině $(0, 1)$ neleží. Uvažujme posloupnost bodů

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \in (0, 1)$$

pro zvyšující se n . Potom vidíme, že se hodnoty této posloupnosti *nekonečně blíží* k hodnotě infima (k nule), ale nikdy této hodnoty nedosáhnou. Podobně toto platí pro posloupnost

$\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\} \in (0, 1)$ a hodnotu suprema 1 .

Limita funkce

Podobně jako v případě reálných posloupností (tj. vlastně funkcí $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) je asi intuitivně zřejmé, co je míněno *limitou funkce v bodě* x_0 .

Funkce $f(x)$ má limitu L v bodě x_0 , pokud se funkční hodnoty $f(x)$ libovolně blíží k číslu L , když je x dostatečně blízko k x_0 .

Příklad

Uvádíme různé *druhy* limit – vlastní/nevlastní limita ve vlastním/nevlastním bodě.

(a) Pro funkci $f(x) = 3x + 1$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x + 1) = 10, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1) = \infty.$$

(b) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ máme (viz obr.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

(c) Co je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$?

Okolí bodu

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme libovolný otevřený interval \mathcal{O} , který a obsahuje.

Je-li okolí definované jako interval $\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ pro kladné číslo δ , hovoříme o δ -**okolí** bodu a (a v případě množiny $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ o ryzím (též prstencovém) okolí bodu a).

Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel \mathbb{R} (*vlastních bodů*) o dvě nekonečné hodnoty $\pm\infty$ (*nevlastní body*), $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná *konečná* čísla $a \in \mathbb{R}$:

$$a + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty, \text{ je-li } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \text{ je-li } a < 0$$

Okolím nekonečna, resp. $-\infty$, rozumíme interval (a, ∞) , resp.

Limita

Definice

Bud' $x_0, L \in \mathbb{R}^*$. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L , píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

pokud pro každé okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Poznámka

To, že požadujeme, aby $x \neq x_0$, znamená, že **limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě x_0 !**, tj. zajímají nás pouze hodnoty v **ryzím** okolí bodu x_0 .

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x \rightarrow 3}(3x + 1) = 10$.

Řešení

Bud' $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $\delta > 0$ takové, aby $|y - 10| < \varepsilon$, kdykoliv bude $0 < |x - 3| < \delta$. Tedy

$$|(3x + 1) - 10| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |3x - 9| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stačí tedy vzít $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$, případně libovolné jiné δ splňující $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Příklad

Ukažte z definice, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení

Bud' $\varepsilon > 0$ libovolné. Chceme najít číslo $a > 0$ takové, aby $|y - 0| < \varepsilon$, kdykoliv bude $x > a$. Tedy $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{x} < \varepsilon$, tj. $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy vzít $a := \frac{1}{\varepsilon}$, případně libovolné jiné a splňující $a \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Ve vlastních bodech x_0 se můžeme blížit k bodu x_0 také jen zprava nebo jen zleva, tj. v definici limity použijeme v pouze pravé ryzí okolí bodu x_0 nebo pouze levé ryzí okolí bodu x_0 . Dostáváme pak pojmy *limity zprava* a *limity zleva*.

Příklad

Pro funkci $\operatorname{sgn} x$ (*signum*=znaménko) definovanou jako

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0, \\ -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Příklad

Pro funkci $\frac{1}{x}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Limita posloupnosti

Jestliže je funkce f je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o **limitách posloupností reálných nebo komplexních čísel**. Zřejmě má smysl psát se pouze po limitách v ∞ (tj. jediným hromadným bodem \mathbb{N} je ∞) a píšeme pro $f(n) = a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ limitní hodnoty a existuje index $N \in \mathbb{N}$ takový, že $a_n \in \mathcal{O}(a)$ pro všechny $n \geq N$. Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti. Říkáme také, že *posloupnost a_n konverguje k a* .

Kdy limita neexistuje?

- skok – funkce má obě jednostranné limity vlastní, které jsou ale různé (viz funkce sgn),
- nekonečný skok – funkce má obě jednostranné limity, přičemž alespoň jedna z nich je nevlastní (tj. $\pm\infty$), tyto jednostranné limity jsou ale různé (viz funkce $1/x$),
- oscilace – např. funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad

Dirichletova funkce

$$q(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \text{ (tj. pro } x \text{ racionální),} \\ 0, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \text{ (tj. pro } x \text{ iracionální),} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, protože v libovolném okolí zvoleného bodu x_0 se nacházejí jak racionální, tak iracionální čísla, a tedy tato funkce zde nabývá hodnot 1 i 0 (a tedy zde nemůže mít limitu).

Vlastnosti limit

Věta

- 1 *Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*
- 2 *Má-li $f(x)$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, potom je $f(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 ohrazená.*
- 3 *Limita existuje, právě když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Vlastnosti limit

Věta

Jsou-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M,$$

kde $L, M \in \mathbb{R}$ (pouze vlastní limity!) a $x_0 \in \mathbb{R}^$, potom*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad \text{pokud } M \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |L|.$$

Vlastnosti limit

Věta (O třech limitách)

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}^$. Je-li $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ na nějakém ryzím okolí bodu x_0 a je-li*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

potom také existuje limita funkce $f(x)$ a je rovna číslu L , tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Příklad

Rozhodněte, jestli má funkce $x \sin \frac{1}{x}$ limitu v bodě $x_0 = 0$.

Řešení

Protože je funkce $\sin x$ ohraničená (jedničkou shora a mínus jedničkou zdola), pro $x \neq 0$ platí nerovnosti $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$.

Spojítost

Spojítost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojitě funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L , v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je spojitá na množině A , jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Příklad

Z vlastností limity snadno plyne, že každý polynom (a tedy i každý splajn) je spojitou funkcí na celém \mathbb{R} . Každá racionální lomená funkce je pak spojitá ve všech bodech, kde je nenulový jmenovatel.

Příklad

- 1 Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.
- 2 Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ (tedy na \mathbb{R}).

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

- ① Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0 , pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

- ② (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Necht' $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(M).$$

- ③ (Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ spojitá v bodě x_0 .

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzanova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b) alespoň jedno řešení

Základní limity

Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (viz obr.).

A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{tj.} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \rightarrow 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$