

# Matematika II – 3. přednáška

## Vlastnosti spojitých funkcí, derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

1. 10. 2008

# Obsah přednášky

- 1 Spojitost
- 2 Přírůstky do ZOO
- 3 Derivace

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB102, e-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (rovněž na <http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf>).

# Spojítost

Spojítost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojitě funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

## Definice

Funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita  $L$ , v bodě  $x_0$  existuje funkční hodnota  $f(x_0)$  a tato dvě čísla jsou si rovna, tj.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce  $f$  je spojitá na množině  $A$ , jestliže je spojitá ve ve všech bodech  $x_0 \in A$  (příp. jednostranně).

## Příklad

Z vlastností limity snadno plyne, že každý polynom (a tedy i každý splajn) je spojitou funkcí na celém  $\mathbb{R}$ . Každá racionální lomená funkce je pak spojitá ve všech bodech, kde je nenulový jmenovatel.

### Příklad

- 1 Funkce  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  je spojitá na intervalu  $[-2, 2]$ , tj.  $f \in C[-2, 2]$ .
- 2 Funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  je spojitá na intervalu  $(-\infty, 0)$ , na intervalu  $(0, \infty)$ , ale není spojitá na intervalu  $(-\infty, \infty)$  (tedy na  $\mathbb{R}$ ).

# Vlastnosti spojitých funkcí

## Vlastnosti

- ① Jsou-li funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  spojité v bodě  $x_0$ , pak jsou zde spojitě i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

- ② (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Necht'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Je-li  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$  a je-li funkce  $f(y)$  spojitá v bodě  $y_0 = M$ , potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(M).$$

- ③ (Spojitost složené funkce.) Je-li funkce  $g(x)$  spojitá v bodě  $x_0$  a je-li funkce  $f(y)$  spojitá v bodě  $y_0 = g(x_0)$ , potom je složená funkce  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  spojitá v bodě  $x_0$ .

# Vlastnosti spojitých funkcí

## Věta (Weierstrassova)

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[a, b]$ , tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.*

## Věta (Bolzanova)

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[a, b]$ , tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom  $f(x)$  nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.*

## Důsledek

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $[a, b]$  a mají-li hodnoty  $f(a)$  a  $f(b)$  různá znaménka, pak existuje bod  $c \in (a, b)$  tak, že platí  $f(c) = 0$ , tj. rovnice  $f(x) = 0$  má v intervalu  $(a, b)$  alespoň jedno řešení*

# Spojitost inverzní funkce

## Věta

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá a ryze monotónní (tj. stále roste nebo stále klesá) na intervalu  $I$ , potom je také inverzní funkce  $f^{-1}(x)$  spojitá a ryze monotónní na intervalu  $J := f(I)$ .*

## Poznámka

Z této věty snadno vyplyne spojitost cyklometrických funkcí  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$  (na příslušných intervalech) a dále spojitost logaritmických funkcí (jakmile je později definujeme).



# Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech  $x_0 \in \mathbb{R}$ ):

## Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , ale tato limita je různá od  $f(x_0)$  (případně  $f(x_0)$  není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze *odstranit* předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty  $f(x_0)$ .

## Příklad

- Funkce  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  má v bodě  $x_0 = 2$  odstranitelnou nespojitost (v podstatě je  $f(x) = x + 2$  pro  $x \neq 2$ ).
- Funkce  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  má v bodě  $x_0 = 0$  odstranitelnou nespojitost.

## Body nespojitosti – pokr.

### skok (nespojnost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě  $f(x_0)$ ).

### Příklad

Funkce  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  má v bodě  $x_0 = 0$  nespojnost typu skok.

### Nespojnost druhého druhu

Alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

### Příklad

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

mají v bodě  $x_0 = 2$  nespojnost druhého druhu.

## Racionální (lomená) funkce

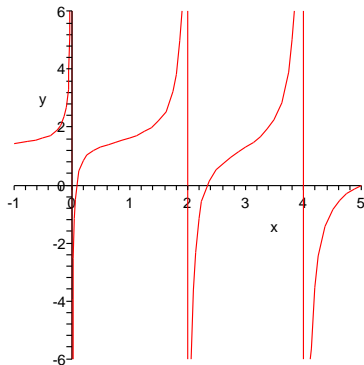
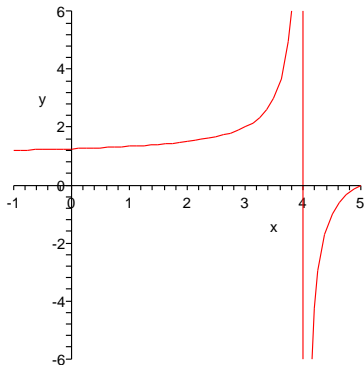
Nechť  $f$  a  $g$  jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy  $a_n x^n + \dots + a_0$  s komplexními  $a_i \in \mathbb{C}$ , ale dosazujeme jen reálné hodnoty za  $x$ ). Pak funkce  $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu  $g$ . Takové funkce nazýváme **racionální (lomené) funkce**.

Racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů  $f$  i  $g$  (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.

a = 0.

a = 1.6667



$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x - 2)(x - 4)}$$

s hodnotami  $a = 0$  a  $a = 5/3$ .

Obrázek vlevo tedy zobrazuje racionální funkci  $(x - 5)/(x - 4)$ .

# Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí  $x \mapsto x^n$  s přirozeným číslem  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Samozřejmý smysl má také funkce  $x \mapsto x^{-1}$  pro všechny  $x \neq 0$ . Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s  $n \in \mathbb{R}$ .

Pro  $n = -a$  s  $a \in \mathbb{N}$  definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu  $b^n = x$  pro  $n \in \mathbb{N}$  vyplývalo  $b = x^{\frac{1}{n}}$ . Je třeba ale ověřit, že taková  $b$  skutečně existují pro dané  $x$ . Předpokládejme  $x > 0$  a označme  $B$  množinu  $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^n \leq x\}$ . To je zřejmě shora ohraničená množina a lze ověřit, že pro  $b = \sup B$  skutečně platí požadovaná rovnost.

Zdůvodnili jsme tedy existenci  $x^a$  pro všechny  $x > 0$  a  $a \in \mathbb{Q}$ .

# Mocninná funkce – pokračování

Konečně, pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$  klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q}, y \leq a\}.$$

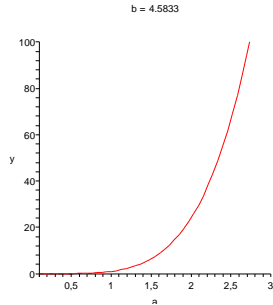
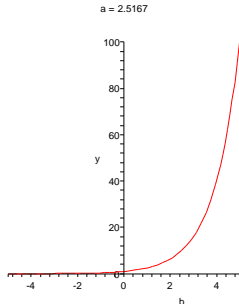
Pro  $0 < x < 1$  buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnicí) nebo klademe přímo  $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$ . Pro  $x = 1$  je pak  $1^a = 1$  pro libovolné  $a$ .

Obecnou mocninnou funkci  $x \mapsto x^a$  máme tedy dobře definovanou pro všechny  $x \in [0, \infty)$  a  $a \in \mathbb{R}$ .

# Exponenciální funkce

Naši konstrukci funkce  $x^a$  ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné  $c > 0$  existuje dobře definovaná funkce na celém  $\mathbb{R}$ ,  $y \mapsto c^y$ . Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu  $c$** .

Na obrázcích vidíme funkce  $x \mapsto a^x$  a  $x \mapsto x^b$  pro jednu konkrétní hodnotu  $a = 2.5167$  a  $b = 4.5833$ .



Z našich definic je vcelku zřejmé, že mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla,  $a$ ,  $x$ ,  $y$ :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$



# Eulerovo číslo

## Příklad

Určete limitu posloupnosti  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

## Řešení

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo  $b$  a přirozené  $n$  platí  $(1 + b)^n > 1 + nb$ , dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n^2 - 1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  je klesající a jistě je  $b_n > a_n$ .

Ověřili jsme tedy existenci limity posloupnosti  $a_n$  (a zároveň vidíme, že je rovna limitě klesající posloupnosti  $b_n$ ).

## Definice

### Limita

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla  $\pi$ ). Nazýváme jej **Eulerovým číslem**  $e$ .

### Poznámka

O číslu  $e$  lze dokázat, že je iracionální a transcendentní (tj. není kořenem nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty) – podobně jako Ludolfovo číslo  $\pi$ .

# Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce  $e^x$  je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji  $\ln x$  a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem  $e$ .

Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Pro obecnou exponenciální funkci  $a^x$  se základem  $a \neq 1$ ,  $a > 0$  také existuje všude inverzní funkce. Říkáme jí **logaritmus při základu  $a$** , píšeme  $\log_a x$ .

# Limity příslušníků ZOO

## Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

## Řešení

Pro  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  platí  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  (viz obr.).

A protože je pro tato  $x$  hodnota  $\sin x > 0$ , je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{tj.} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce  $\cos x$  spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro  $x \rightarrow 0^+$  blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

## Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

## Řešení

Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \right) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

## Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

## Řešení

Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .

Pomocí nerovnosti  $1 + \frac{x}{x+1} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x}$ , pro  $x \in (0, \frac{1}{2})$ ,

neboli  $\frac{1}{x+1} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x}$ , pro  $x \in (0, \frac{1}{2})$ , dostaneme z věty o

třech limitách, že  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ . Podobně, platí

$\frac{1}{1-2x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{x+1}$ , pro  $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ , a tedy podle věty o

třech limitách platí  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$ . Celkově tedy dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

## Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

## Řešení

Z předchozího příkladu víme, že pro malé  $x$  je  $e^x - 1 \approx x$ , tedy je  $e^x \approx 1 + x$ . Logaritmováním obou stran dostaneme, že  $x \approx \ln(1+x)$ . Tedy platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

## Příklad

Určete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

## Řešení

Dosazením za  $x = 0$  dostaneme, že tato limita je typu  $\left| \frac{0}{0} \right|$ .  
Pomocí rovnosti  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$  dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\rightarrow 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$



# Derivace

## Definice

Nechť  $f$  je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem  $A \subset \mathbb{R}$  a  $x_0 \in A$ . Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  **derivaci**  $a$ . Píšeme často  $a = f'(x_0)$  nebo  $a = \frac{df}{dx}(x_0)$  případně  $a = \frac{d}{dx}f(x_0)$ .

Derivace funkce je **vlastní**, resp. **nevlastní**, když je takovou příslušná limita.

**Jednostranné derivace** (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Analyzujme difereční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což je směrnice sečny procházející body  $M = [x_0, f(x_0)]$  a

$N = [x, f(x)]$

Pokud se  $x$  blíží k  $x_0$  (tj. bod  $N$  se blíží k bodu  $M$ ), sečna  $MN$  se stává tečnou v bodě  $M$ , a tedy je

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

směrnicí tečny v bodě  $M = [x_0, f(x_0)]$ .

## Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x) = 1/x$  v bodě  $x_0 = 1$ .

## Řešení

Směrnici tečny získáme vypočtením příslušné limity

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1.\end{aligned}$$

Rovnici tečny pak dostaneme ze vztahu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

tj.

$$y = -x + 2.$$

## Poznámka

- Derivace  $f'(x_0)$  (jako limita) je vždy limitou typu  $\frac{0}{0}$ .
- Každá funkce má v libovolném bodě  $x_0$  nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota  $f'(x_0)$  popisuje rychlost změny funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li  $h := x - x_0$ , dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  dobře aproximuje funkci  $f$  v dostatečně malém okolí bodu  $x_0$ .
- Aby mohla mít funkce  $f(x)$  derivaci v bodě  $x_0$ , musí být definována na nějakém okolí bodu  $x_0$  (včetně bodu  $x_0$ )!
- $f'(x_0)$  někdy píšeme jako  $\frac{df}{dx}(x_0)$ , nebo jako  $f'(x)|_{x=x_0}$ .

## Příklad

Určete derivaci funkce  $f(x) = \sqrt{x}$  v bodech  $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ .

## Řešení

Zřejmě je  $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ . Pro  $x_0 > 0$  je

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Pro  $x_0 = 0$  derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava).

Vypočtěme tedy derivaci zprava:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Funkce  $f(x) = \sqrt{x}$  tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci  $f'_+(0) = \infty$ , neboli tečna v bodě  $x_0 = 0$  je svislá přímka.

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod  $x_0$  budeme dívat jako na *proměnnou*, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu  $x$  přiřadí hodnotu  $f'(x)$  (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy  $f'(x)$  je opět funkce proměnné  $x$ , přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce  $f(x)$  derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu)  $I$ , pak říkáme, že  $f(x)$  je diferencovatelná na  $I$ . Např.  $x^n$  je diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , nebo  $\frac{1}{x}$  je diferencovatelná na  $(0, \infty)$  a na  $(-\infty, 0)$ .

# Derivace v praxi

## rychlost

Je-li  $s(t)$  poloha hmotného bodu na přímce v čase  $t$ , potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek  $[t_0, t]$ . Zřejmě je pak

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku  $t_0$ , a tedy je

$$v(t) = s'(t), \quad \text{rychlost je derivace dráhy.}$$

Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost  $v(t)$  má znaménko, tj.

$v(t) > 0$  ve směru pohybu, kdy se  $s(t)$  zvětšuje a  $v(t) < 0$ , když se  $s(t)$  zmenšuje.

## zrychlení

Protože je zrychlení  $a(t)$  změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku  $t_0$ , a tedy je

$$a(t) = v'(t), \quad \text{zrychlení je derivace rychlosti.}$$



## výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \quad \text{výkon je derivace práce.}$$

## proud

Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna napětí}}{\text{změna času}},$$

je

$$I(t) = U'(t), \quad \text{proud je derivace napětí.}$$

# Vlastnosti a pravidla derivací

V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

## Věta

Má-li  $f(x)$  v bodě  $x_0$  vlastní derivaci  $f'(x_0)$ , potom je funkce  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ .

## Důkaz.

Chceme ukázat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Protože existuje vlastní  $f'(x_0)$  je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} \right) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Je tedy  $f(x)$  spojitá v bodě  $x_0$ . □

# Pravidla pro derivace

## Věta

- ① *Pravidlo konstantního násobku:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

- ② *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

- ③ *Pravidlo součinu:*

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- ④ *Pravidlo podílu:*

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

## Důkaz.

Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity).  
Ukážeme pravidlo součinu:

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\rightarrow g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \right\} \\
 &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),
 \end{aligned}$$

