Matematika II – 10. přednáška
Nevlastní integrály, nekonečné řady

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 11. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka – **Nekonečné řady s programem Maple**, CD, *e*-text a videozáznamy, `http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm`.

Plán přednášky

Stejně jako je $\int_a^b f$ plocha mezi grafem (ohraničené) funkce $f(x)$ a osou x na (konečném) intervalu $[a, b]$, můžeme chtít najít tuto plochu na <u>neohraničeném</u> intervalu $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$, případně i pro <u>neohraničenou</u> funkci $f(x)$. Dostáváme se tak k pojmu <u>nevlastního integrálu</u>

$$\int_a^{\infty} f, \qquad \int_{-\infty}^{b} f, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Přitom, jak uvidíme, všechna pravidla pro výpočet integrálu zůstávají zachována, jen je potřeba dávat pozor na neurčité výrazy (obsahující symbol ∞) a ty pak spočítat pomocí limity.

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

- Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 1]$ je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \left(-\frac{1}{0^+}\right) = -1 + \infty = \infty.$$

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

- Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 1]$ je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \left(-\frac{1}{0^+}\right) = -1 + \infty = \infty.$$

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty.$$

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že <u>nevlastní integrál</u> $\int_a^\infty f(x)\, dx$ <u>konverguje</u> a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Podobně hovoříme o divergenci integrálu.

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Podobně hovoříme o divergenci integrálu.
Obdobně pro interval $[-\infty, b]$.

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx, \qquad a \neq 0.$$

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \qquad a \neq 0.$$

Řešení

Pomocí substituce dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x = 0 \;\Rightarrow t = 0 \\ x = \infty \;\Rightarrow\; t = \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(t+a^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+a^2}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(-\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+a^2}}_{=0}\right) - \left(-\frac{1}{a^2}\right)\right\} = \frac{1}{2a^2}.$$

Někdy lze podobným způsobem s využitím pravidla návaznosti vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$, Někdy lze podobným způsobem s využitím pravidla návaznosti vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$,

Příklad

V pravděpodobnosti a statistice se často používá nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1,$$

přičemž funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

se nazývá hustota pravděpodobnosti (standardního) normálního rozdělení. Protože je tato funkce $f(x)$ sudá, zřejmě je pak

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533.$$

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx = L,$$

říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx = L,$$

říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Pokud je tato limita nevlastní, říkáme, že integrál diverguje.

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx = L,$$

říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Pokud je tato limita nevlastní, říkáme, že integrál diverguje. Podobně i v případě funkce definované na intervalu $[a, b)$ a definice nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)\, dx$ pomocí (levostranné) limity $\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\, dx$.

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1, 1)$ neohraničená a sudá. Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0, 1)$.

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\left[\arcsin x\right]_0^1 = 2\left(\left(\lim_{x\to 1^-} \arcsin x\right) - \arcsin 0\right)$$
$$= 2\left(\arcsin 1 - \arcsin 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1, 1)$ neohraničená a sudá. Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0, 1)$.

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\left[\arcsin x\right]_0^1 = 2\left(\left(\lim_{x\to 1^-} \arcsin x\right) - \arcsin 0\right)$$
$$= 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

V tomto případě limita ani není potřeba, protože primitivní funkce $F(x) = \arcsin x$ k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je spojitá v bodě $x = 1$ a tedy $P = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Plán přednášky

1. Nevlastní integrály
2. Nekonečné řady
   - Základní pojmy
   - Nekonečné řady s nezápornými členy
   - Kritéria konvergence
   - Řady absolutně a relativně konvergentní

V této kapitole se budeme věnovat součtům nekonečně mnoha sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit geometrická řada, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n. To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů nekonečného stupně, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

V této kapitole se budeme věnovat součtům nekonečně mnoha sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit geometrická řada, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n. To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů nekonečného stupně, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

Budeme pracovat s posloupností reálných čísel

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Definice (Nekonečná řada)

Součet tvaru $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou (číselnou) řadou. Číslo a_n se nazývá n–tý člen.

Číslo $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ se nazývá n–tý částečný součet této nekonečné řady.

Geometrická řada

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla, je to tedy nekonečná řada pro $a_n := aq^n$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné.

Geometrická řada

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla, je to tedy nekonečná řada pro $a_n := aq^n$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické řady, přičemž q může být kladné či záporné. Posloupnost částečných součtů je

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n,$$

odkud $qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + aq^{n+1}$ a odečtením dostaneme

$$s_n\,(1-q) = a\,(1-q^{n+1}).$$

Pro $q = 1$ je zřejmě $s_n = (n+1)a$, je-li $q \neq 1$, potom je

$$s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k číslu s, nebo také že má součet s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k číslu s, nebo také že má součet s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k číslu s, nebo také že má součet s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ osciluje.

Věta (Konvergence a divergence geometrické řady)

Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ *konverguje pro* $a \neq 1$, *právě když* $|q| < 1$. *V případě konvergence je pak její součet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Důkaz.

Zřejmý z toho, že

$$s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Posloupnost $\left\{q^{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k 0, právě když je $|q| < 1$, k ∞ pro $q \geq 1$ a nemá limitu pro $q \leq -1$. Odtud pro $|q| < 1$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

$\square$

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně zmenšovat (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom nutně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně zmenšovat (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom nutně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz.

Konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implikuje $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ a protože $a_n = s_n - s_{n+1}$, zřejmě $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. $\square$

Harmonická řada

Předchozí podmínka je skutečně pouze podmínkou nutnou:

Příklad

Řada $\sum_{1=\frac{1}{n}}^{\infty} n$ se nazývá harmonická (každý její člen je *harmonickým půměrem* dvou sousedních členů (tj. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}})$).

Harmonická řada

Předchozí podmínka je skutečně pouze podmínkou nutnou:

Příklad

Řada $\sum_{1=\frac{1}{n}}^{\infty} n$ se nazývá harmonická (každý její člen je *harmonickým půměrem* dvou sousedních členů (tj. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}})$). Zřejmě je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, přitom ale řada diverguje, neboť

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_4 > s_2 + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_8 > s_4 + 4\cdot\frac{1}{8} = 1 + 3\cdot\frac{1}{2}, \quad s_{16} > s_8 + 8\cdot\frac{1}{16} = 1 + 4\cdot\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_n > 1 + n\cdot\frac{1}{2},$$

odkud je snadno vidět, že $\{n\}_{1=s_n}^{\infty}$ diverguje.

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obodbným vlastnostem limit plyne následující věta.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. *Pak platí:*

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obodbným vlastnostem limit plyne následující věta.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. *Pak platí:*

1. *pravidlo konstantního násobku: pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$ *nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \,.\, A.$$

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obodbným vlastnostem limit plyne následující věta.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují a nechť platí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. Pak platí:

1. *pravidlo konstantního násobku: pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n$ konverguje a platí*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c \,.\, a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \,.\, A.$$
2. *Pravidlo součtu a rozdílu: nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konverguje a platí*
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

Předchozí věta nic neříká o součinu (a podílu) nekonečných řad. Tato problematika je mnohem složitější, než se na první pohled zdá, a kolem součinu řad existuje celá teorie (protože existují různé součiny nekonečných řad). Uvědomte si totiž, že při násobení mnohočlenů platí

$$\begin{aligned}&(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \cdots + b_n)\\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n,\end{aligned}$$

tedy dostáváme nejen diagonální součiny $a_i b_i$, ale také všechny smíšené součiny $a_i b_j$. A pro součin takovýchto nekonečných mnohočlenů (tedy pro součin nekonečných řad) bude situace ještě mnohem složitější, protože bude záležet na tom, jakým způsobem výsledný součet jednotlivých součinů uspořádáme (viz později uvedené příklady).

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající.

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající.

A pokud je tedy neklesající posloupnost $\left\{s_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s nezápornými členy je její posloupnost částečných součtů neklesající.

A pokud je tedy neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Věta (srovnávací kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna n od jistého n_0

1. *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, potom také konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*
2. *Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞, potom také řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje k ∞.*

Pro použití srovnávacího kritéria je zřejmě potřeba mít v zásobě nějaký soubor nekonečných řad, o kterých víme, že jsou konvergentní/divergentní.

Příklad

Nekonečná řada $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje podle srovnávacího kritéria, protože všechny její členy lze shora omezit příslušnými členy konvergentní řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Pro součet uvedené řady pak zřejmě platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Příklad

Nekonečná řada

$$\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

diverguje k ∞ podle srovnávacího kritéria, protože její členy lze zdola omezit příslušnými členy (divergentní) harmonické řady, tj. platí

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{pro všechna } n \geq 2.$$

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n \to \infty} s_n = 1$.

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Součet řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je tedy shora omezen číslem 2.

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Součet řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je tedy shora omezen číslem 2.
Vyčíslení této řady je z historie známo jako basilejský problém, který vyřešil v roce 1735 Leonhard Euler (důkaz viz `wikipedia` nebo si počkejte na Taylorovy a Fourierovy řady).

Věta (integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť* $f(x)$ *je funkce definovaná na intervalu* $[N, \infty)$ *pro nějaké* $N \in [0, \infty)$*, která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{konverguje},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje k } \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx = \infty.$$

Příklad

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ <u>diverguje k ∞</u> podle integrálního kritéria, protože funkce $f(x) := \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$, přičemž je nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí**, proto diverguje k ∞. Rovněž v prípadech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí**, proto diverguje k ∞. Rovněž v prípadech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.
Pro $p > 0, p \neq 1$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$. Máme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}.$$

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí**, proto diverguje k ∞. Rovněž v prípadech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.
Pro $p > 0, p \neq 1$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$. Máme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}.$$

Odtud snadno plyne divergence pro $p > 1$ a konvergence pro $p \in (0, 1)$.

Věta (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Věta (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

1. *tato řada konverguje, pokud je $q < 1$,*
2. *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q > 1$ nebo $q = \infty$,*
3. *tento test nedává odpověď, pokud je $q = 1$.*

Příklad

Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\,.\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,.\,n!} = \frac{(n+1)\,.\,n!\,.\,n^n}{(n+1)^n\,.\,(n+1)\,.\,n!} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

přičemž ve výpočtu jsme použili limitu definující Eulerovo číslo e. Uvedená řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna* $n \geq N$ *pro nějaké* $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna $n \geq N$ pro nějaké $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Potom

1. *tato řada konverguje, pokud je $q < 1$,*
2. *tato řada diverguje k ∞, pokud je $q > 1$ nebo $q = \infty$,*
3. *tento test nedává odpověď, pokud je $q = 1$.*

Příklad

Pro nekonečnou řadu
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots$, tj.

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases}$$

s podílovým kritériem neuspějeme,

Příklad

Pro nekonečnou řadu
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots$, tj.

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases}$$

s podílovým kritériem neuspějeme, zatímco odmocninové kritérium použít lze, neboť

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Platí tedy nerovnosti $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Limita výrazu na pravé straně se spočte přes exponenciální funkci a l'Hospitalovo pravidlo: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1.$

Příklad

Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1,$$

Příklad

Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \\ = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1,$$

a pro odmocninové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p = \\ = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^p = \frac{1}{1^p} = 1.$$

Zde jsme opět použili limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Alternující řady

Uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom se nekonečná řada $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, případně $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, nazývá alternující řada.

Alternující řady

Uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. Potom se nekonečná řada $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, případně $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, nazývá alternující řada.

Pro alternující řady se nutná podmínka pro konvergenci stává i podmínkou postačující.

Věta

Jestliže je $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel, potom nekonečná alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje, právě když platí $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$.

Řady absolutně a relativně konvergentní

Nejprve si všimněme, že pokud konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, *potom konverguje také řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Řady absolutně a relativně konvergentní

Nejprve si všimněme, že pokud konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, potom konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Důkaz.

Zřejmě pro každé n platí nerovnosti
$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|$. Tedy pokud $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2\,|a_n|$ (podle pravidla konstantního násobku). A dále, podle srovnávacího kritéria, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right)$. A protože platí rovnost $a_n = \left(a_n + |a_n|\right) - |a_n|$, máme
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, odkud dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jako rozdíl dvou konvergentních řad. Tedy tato řada také konverguje podle pravidla rozdílu. $\square$

Poznámka

Opačná implikace ve větě zřejmě neplatí, protože např. alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, která diverguje k ∞,

Poznámka

Opačná implikace ve větě zřejmě neplatí, protože např. alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje k ∞,

Definice

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně (je absolutně konvergentní), pokud konverguje příslušná řada absolutních hodnot, tj. pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.
Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně, potom říkáme, že tato řada konverguje relativně (je relativně konvergentní).

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Rozdíl mezi absolutně a relativně konvergentní řadou je zejména v tom, že členy <u>absolutně</u> konvergentní řady můžeme <u>libovolně</u> přeskládávat a nejenže dostaneme opět konvergentní řadu, ale tato nová přeskládaná řada bude mít <u>stejný součet</u> jako řada původní. Naproti tomu členy <u>relativně</u> konvergentní řady <u>nelze</u> přeskládávat vůbec. Lze totiž jednoduše ukázat, že různým přeskládáním téže relativně konvergentní řady lze vytvořit řadu divergující k $\pm\infty$, konvergující k libovolně předem zvolenému reálnému číslu, či řadu oscilující. To vyplývá z toho, že v relativně konvergentní řadě musí být součet všech kladných členů ∞ a součet všech záporných členů $-\infty$, a při tom musí členy samotné konvergovat k nule.

Součin řad

Příklad

V tomto příkladu si ukážeme, že i když obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, b_n)$ konvergovat nemusí.
Uvažujme nekonečné řady, kde $a_n = b_n := (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Potom jsou příslušné nekonečné řady konvergentní, což plyne z Leibnitzova kritéria, zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞.

Příklad

Na druhou stranu může nastat i situace, že takováto řada součinů $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, c_n)$ konverguje, přestože jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje. Vezměme si např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

která <u>diverguje</u> k ∞, zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \,.\, c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

<u>konverguje</u>