Matematika II – 14. přednáška
Závěrečné shrnutí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17. 12. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Plán přednášky

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu – nehomogenní

Minule jsme ukázali, že homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu lze snadno vyřešit pomocí separace proměnných. Řešením rovnice $y' = a(x)y$ je, jak jsme ukázali,

$$y = C\, e^{\int a(x)\, dx}.$$

V (obvyklejším) případě nehomogenní rovnice lze postupovat více způsoby, ukážeme stručně metodu *integračního faktoru* a obecnější metodu *variace konstanty*:

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu – nehomogenní

Minule jsme ukázali, že homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu lze snadno vyřešit pomocí separace proměnných. Řešením rovnice $y' = a(x)y$ je, jak jsme ukázali,

$$y = C\, e^{\int a(x)\, dx}.$$

V (obvyklejším) případě nehomogenní rovnice lze postupovat více způsoby, ukážeme stručně metodu *integračního faktoru* a obecnější metodu *variace konstanty*:

Integrační faktor

V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí $\mu(x)$ (tzv. integračním faktorem), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := e^{-\int a(x)\, dx}.$$

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x)$.

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x)$.
- Odtud dostaneme řešení

$$C(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx.$$

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x)$.
- Odtud dostaneme řešení

$$C(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx.$$

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x)$.
- Odtud dostaneme řešení

$$C(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx.$$

Poznamenejme, že v obou případech zřejmě počítáme tytéž integrály, takže z výpočetního hlediska jsou oba postupy ekvivalentní.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \to \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici. Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně pomocí dvou počátečních podmínek $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \to \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici.
Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně pomocí dvou počátečních podmínek $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).
O těchto rovnicích existuje velké množství literatury, obvykle se studují zejména rovnice s konstantními koeficienty

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(x),$$

které mají mnoho aplikací např. při modelování mechanického a elektromagnetického kmitání.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y = 0$ pomocí nekonečných řad.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y = 0$ pomocí nekonečných řad.

Řešení

Hledejme řešení této rovnice ve tvaru mocninné řady $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Potom podle pravidla pro derivaci mocninné řady platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\, x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n\,(n-1)\, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\, x^n.$$

Řešení (pokr.)

Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme

$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n}_{y} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n \right] x^n$$

Řešení (pokr.)

Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme

$$0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1)\,x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n}_{y} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n\right] x^n$$

Tedy poslední uvedená řada je mocninná řada pro konstantní funkci $s(x) \equiv 0$, a proto musí všechny její koeficienty být nulové, tj.

$$a_{n+2}\,(n+2)\,(n+1) + a_n = 0 \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řešení

Odtud vychází rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)\,(n+1)} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy jsou-li koeficienty a_0 a a_1 dány (všimněte si, že $a_0 = y(0)$ a $a_1 = y'(0)$, tj. tyto koeficienty jsou dány počátečními podmínkami ve středu hledané mocninné řady), potom je

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2}, & a_3 &= -\frac{a_1}{3\,.\,2},\\
a_4 &= -\frac{a_2}{4\,.\,3} = \frac{a_0}{4!}, & a_5 &= -\frac{a_3}{5\,.\,4} = \frac{a_1}{5!},\\
&\vdots & &\vdots\\
a_{2k} &= (-1)^k\,\frac{a_0}{(2k)!}, & a_{2k+1} &= (-1)^k\,\frac{a_1}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Řešení (dokončení)

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \dots$$

$$= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right\}$$

$$+ a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right\}$$

$$= a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\}.$$

Řešení (dokončení)

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$
\begin{aligned}
y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \dots \\
&= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right\} \\
&\quad + a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right\} \\
&= a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\}.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že hledané obecné řešení je lineární kombinací dvou funkcí, přičemž uvedené mocninné řady konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jejich poloměr konvergence je $R = \infty$). Neboli obecné řešení uvedené diferenciální rovnice je (pro $C := a_0$ a $D := a_1$) rovno $y = C \cos x + D \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad C, D \in \mathbb{R}$.

Plán přednášky

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.

Metoda nejmenších čtverců – flashback Hledáme funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Metoda nejmenších čtverců – flashback Hledáme funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Následující tvrzení lze snadno odvodit pomocí metody na nalezení extrému funkce dvou proměnných (tato metoda je analogií pro hledání extrému funkce jedné proměnné, přesněji viz MB103).

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \dots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
6. Primitivní funkce – metody výpočtu.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
6. Primitivní funkce – metody výpočtu.
7. Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
6. Primitivní funkce – metody výpočtu.
7. Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
8. Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
6. Primitivní funkce – metody výpočtu.
7. Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
8. Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.
9. Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná spojitosti, Taylorovy a Fourierovy řady, jejich využití při aproximaci.

Závěrečné shrnutí

1. Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
2. Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
3. Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
4. Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
5. Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
6. Primitivní funkce – metody výpočtu.
7. Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
8. Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.
9. Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná spojitosti, Taylorovy a Fourierovy řady, jejich využití při aproximaci.
10. Elementární diferenciální rovnice.