Matematika II – 3. přednáška
Vlastnosti spojitých funkcí, derivace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

1. 10. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf`).

Plán přednášky

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva.

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je spojitá na množině A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Spojitost

Spojitost funkce je důležitým znakem jejího chování. Uvidíme, že spojité funkce mají téměř všechny *důležité* vlastnosti.

Definice

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje v tomto bodě vlastní limita L, v bodě x_0 existuje funkční hodnota $f(x_0)$ a tato dvě čísla jsou si rovna, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Obdobně spojitost zprava a zleva. Funkce f je spojitá na množině A, jestliže je spojitá ve ve všech bodech $x_0 \in A$ (příp. jednostranně).

Příklad

Z vlastností limity snadno plyne, že každý polynom (a tedy i každý splajn) je spojitou funkcí na celém $\mathbb{R}$. Každá racionální lomená funkce je pak spojitá ve všech bodech, kde je nenulový jmenovatel.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ je spojitá na intervalu $[-2, 2]$, tj. $f \in C[-2, 2]$.
2. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(-\infty, 0)$, na intervalu $(0, \infty)$, ale není spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ (tedy na $\mathbb{R}$).

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce

$$(f \pm g)(x), \quad f(x)\,.\,g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$

2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$

Vlastnosti spojitých funkcí

Vlastnosti

1. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak jsou zde spojité i funkce
$$(f \pm g)(x), \quad f(x) \,.\, g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ pro } g(x_0) \neq 0.$$
2. (Věta o záměnnosti limitního přechodu a funkce.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Je-li $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$ a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = M$, potom
$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to x_0} g(x)\Big) = f(M).$$
3. (Spojitost složené funkce.) Je-li funkce $g(x)$ spojitá v bodě x_0 a je-li funkce $f(y)$ spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom je složená funkce $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ spojitá v bodě x_0.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $[a, b]$, *tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.*

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své nejmenší a největší hodnoty.

Věta (Bolzanova)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, tj. na uzavřeném konečném intervalu, potom $f(x)$ nabývá v tomto intervalu všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, pak existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že platí $f(c) = 0$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu (a, b) alespoň jedno řešení

Spojitost inverzní funkce

Věta

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá a ryze monotónní (tj. stále roste nebo stále klesá) na intervalu* I, *potom je také inverzní funkce* $f^{-1}(x)$ *spojitá a ryze monotónní na intervalu* $J := f(I)$.

Spojitost inverzní funkce

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní (tj. stále roste nebo stále klesá) na intervalu I, potom je také inverzní funkce $f^{-1}(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $J := f(I)$.

Poznámka

Z této věty snadno vyplyne spojitost cyklometrických funkcí $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ (na příslušných intervalech) a dále spojitost logaritmických funkcí (jakmile je později definujeme).

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze *odstranit* předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze *odstranit* předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Příklad

- Funkce $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ má v bodě $x_0 = 2$ odstanitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x + 2$ pro $x \neq 2$).

Body nespojitosti

Rozlišujeme následující typy nespojitosti (v bodech $x_0 \in \mathbb{R}$):

Odstranitelná nespojitost

Existuje vlastní limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ale tato limita je různá od $f(x_0)$ (případně $f(x_0)$ není vůbec definována). Tento typ nespojitosti lze *odstranit* předefinováním (případně dodefinováním) hodnoty $f(x_0)$.

Příklad

- Funkce $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ má v bodě $x_0 = 2$ odstanitelnou nespojitost (v podstatě je $f(x) = x + 2$ pro $x \neq 2$).
- Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má v bodě $x_0 = 0$ odstanitelnou nespojitost.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Nespojitost druhého druhu

Alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

Body nespojitosti – pokr.

skok (nespojitost prvního druhu)

Existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, ale tyto jednostranné limity jsou různé (přitom vůbec nezáleží na hodnotě $f(x_0)$).

Příklad

Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má v bodě $x_0 = 0$ nespojitost typu skok.

Nespojitost druhého druhu

Alespoň jedna jednostranná limita je buď nevlastní nebo neexistuje.

Příklad

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

mají v bodě $x_0 = 2$ nespojitost druhého druhu.

Plán přednášky

Racionální (lomená) funkce

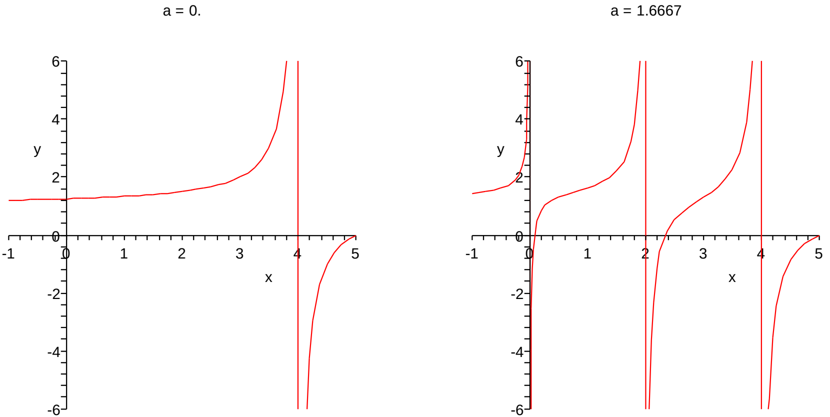
Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \cdots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g. Takové funkce nazýváme **racionální (lomené) funkce**.

Racionální (lomená) funkce

Nechť f a g jsou dva polynomy, které mohou mít i komplexní hodnoty (tj. připouštíme výrazy $a_n x^n + \cdots + a_0$ s komplexními $a_i \in \mathbb{C}$, ale dosazujeme jen reálné hodnoty za x). Pak funkce $h : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \to \mathbb{C}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ je dobře definována ve všech reálných bodech kromě kořenů polynomu g. Takové funkce nazýváme **racionální (lomené) funkce**.

Racionální funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru. V bodech, kde definovány nejsou mohou mít

- konečnou limitu, když jde o společný kořen polynomů f i g (a v tomto případě rozšířením jejich definice o limitní hodnotu v tomto bodě dostaneme funkci i v tomto bodě spojitou)
- nekonečnou limitu, když limity zprava a zleva v tomto bodě jsou stejné
- různé nekonečné limity zprava a zleva.



$$h(x) = \frac{(x - 0.05a)(x - 2 - 0.2a)(x - 5)}{x(x - 2)(x - 4)}$$

s hodnotami $a = 0$ a $a = 5/3$.
Obrázek vlevo tedy zobrazuje racionální funkci $(x - 5)/(x - 4)$.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \ldots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.
Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují pro dané x. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0,\ y^n \leq x\}$. To je zřejmě shora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.

Mocninné funkce

Polynomy jsou seskládány z jednoduchých mocninných funkcí $x \mapsto x^n$ s přirozeným číslem $n = 0, 1, 2, \dots$. Samozřejmý smysl má také funkce $x \mapsto x^{-1}$ pro všechny $x \neq 0$. Tuto definici rozšíříme na obecnou **mocninnou funkci** s $n \in \mathbb{R}$.
Pro $n = -a$ s $a \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{-a} = (x^a)^{-1} = (x^{-1})^a.$$

Dále jistě chceme, aby ze vztahu $b^n = x$ pro $n \in \mathbb{N}$ vyplývalo $b = x^{\frac{1}{n}}$. Je třeba ale ověřit, že taková b skutečně existují pro dané x. Předpokládejme $x > 0$ a označme B množinu $B = \{y \in \mathbb{R}, y > 0,\ y^n \leq x\}$. To je zřejmě shora ohraničená množina a lze ověřit, že pro $b = \sup B$ skutečně platí požadovaná rovnost.
Zdůvodnili jsme tedy existenci x^a pro všechny $x > 0$ a $a \in \mathbb{Q}$.

Mocninná funkce – pokračování

Konečně, pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 1$ klademe

$$x^a = \sup\{x^y, y \in \mathbb{Q},\ y \le a\}.$$

Pro $0 < x < 1$ buď definujeme analogicky (je třeba si jen pohrát s nerovnítky) nebo klademe přímo $x^a = (\frac{1}{x})^{-a}$. Pro $x = 1$ je pak $1^a = 1$ pro libovolné a.
Obecnou mocninnou funkci $x \mapsto x^a$ máme tedy dobře definovanou pro všechny $x \in [0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$.

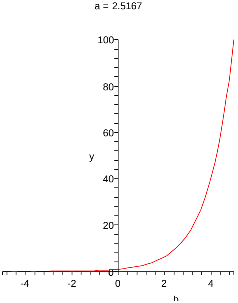
Exponenciální funkce

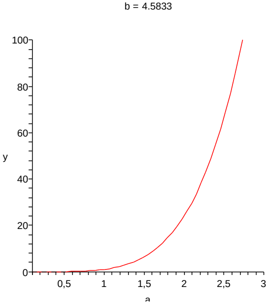
Naši konstrukci funkce x^a ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém $\mathbb{R}$, $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu** c.

Exponenciální funkce

Naši konstrukci funkce x^a ale můžeme také číst následujícím způsobem: Pro každé pevné reálné $c > 0$ existuje dobře definovaná funkce na celém $\mathbb{R}$, $y \mapsto c^y$. Této funkci říkáme **exponenciální funkce o základu** c.

Na obrázcích vidíme funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$ pro jednu konkrétní hodnotu $a = 2.5167$ a $b = 4.5833$.





Z našich definic je vcelku zřejmé, že mocninné i exponenciální funkce jsou spojité na celých svých definičních oborech. Zároveň se ze spojitosti definice pomocí suprem množin hodnot zjevně přenáší základní vlastnosti platné pro racionální čísla, a, x, y:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1 + nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > (1-\frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n$ je klesající a jistě je $b_n > a_n$.

Eulerovo číslo

Příklad

Určete limitu posloupnosti $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$.

Řešení

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1+nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > (1-\frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n$ je klesající a jistě je $b_n > a_n$.

Ověřili jsme tedy existenci limity poslounosti a_n (a zároveň vidíme, že je rovna limitě klesající posloupnosti b_n).

Definice

Limita

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π). Nazýváme jej **Eulerovým číslem** e.

Definice

Limita

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π). Nazýváme jej **Eulerovým číslem** e.

Poznámka

O čísle e lze dokázat, že je iracionální a transcendentní (tj. není kořenem nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty) – podobně jako Ludolfovo číslo π.

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x je všude dobře definována a prostá, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Pro obecnou exponenciální funkci a^x se základem $a \neq 1$, $a > 0$ také existuje všude inverzní funkce. Říkáme jí **logaritmus při základu** a, píšeme $\log_a x$.

Limity příslušníků ZOO

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Limity příslušníků ZOO

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení

Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (viz obr.).
A protože je pro tato x hodnota $\sin x > 0$, je

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Jelikož je funkce $\cos x$ spojitá (v nule), obě strany nerovnosti se pro $x \to 0^+$ blíží k 1, a tedy podle věty o třech limitách je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} \right) = 1 \,.\, 0 \,.\, \frac{1}{2} = 0.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí nerovnosti $1+\frac{x}{x+1} < e^x < 1+\frac{x}{1-2x}$, pro $x \in (0, \frac{1}{2})$, neboli $\frac{1}{x+1} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x}$, pro $x \in (0, \frac{1}{2})$, dostaneme z věty o třech limitách, že $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x=0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí nerovnosti $1+\frac{x}{x+1}<e^x<1+\frac{x}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, neboli $\frac{1}{x+1}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{1-2x}$, pro $x\in(0,\frac{1}{2})$, dostaneme z věty o třech limitách, že $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$. Podobně, platí
$\frac{1}{1-2x}<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{x+1}$, pro $x\in(-\frac{1}{2},0)$, a tedy podle věty o třech limitách platí $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$. Celkově tedy dostaneme
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Příklad

Určete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Řešení

Z předchozího příkladu víme, že pro malé x je $e^x - 1 \approx x$, tedy je $e^x \approx 1 + x$. Logaritmováním obou stran dostaneme, že $x \approx \ln(1+x)$. Tedy platí, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Příklad

Určete
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Řešení

Dosazením za $x = 0$ dostaneme, že tato limita je typu $\left|\frac{0}{0}\right|$.
Pomocí rovnosti $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}}_{\to 1} \cdot \ln a = \ln a,$$

a tedy je
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Plán přednášky

Derivace

Definice

Nechť f je reálná nebo komplexní funkce s definičním oborem $A \subset \mathbb{R}$ a $x_0 \in A$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

pak říkáme, že f má v bodě x_0 **derivaci** a. Píšeme často $a = f'(x_0)$ nebo $a = \frac{df}{dx}(x_0)$ případně $a = \frac{d}{dx} f(x_0)$.

Derivace funkce je **vlastní**, resp. **nevlastní**, když je takovou příslušná limita.

Jednostranné derivace (tj. derivaci zprava a zleva) definujeme zcela stejně pomocí limity zprava a zleva.

Analyzujme difereční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což je směrnice sečny procházející body $M = [x_0, f(x_0)]$ a $N = [x, f(x)]$

Analyzujme difereční podíl (viz obr.)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

což je směrnice sečny procházející body $M = [x_0, f(x_0)]$ a $N = [x, f(x)]$

Pokud se x blíží k x_0 (tj. bod N se blíží k bodu M), sečna MN se stává <u>tečnou v bodě M</u>, a tedy je

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

směrnicí tečny v bodě $M = [x_0, f(x_0)]$.

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení

Směrnici tečny získáme vypočtením příslušné limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodě $x_0 = 1$.

Řešení

Směrnici tečny získáme vypočtením příslušné limity

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1}{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{x\,(x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1.$$

Rovnici tečny pak dostaneme ze vztahu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

tj.

$$y = -x + 2.$$

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.
- Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!

Poznámka

- Derivace $f'(x_0)$ (jako limita) je vždy limitou typu $\frac{0}{0}$.
- Každá funkce má v libovolném bodě x_0 nejvýše jednu derivaci.
- Hodnota $f'(x_0)$ popisuje rychlost změny funkce $f(x)$ v bodě x_0 (růst nebo pokles a současně velikost tohoto růstu nebo poklesu).
- Položíme-li $h := x - x_0$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Tečna $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dobře aproximuje funkci f v dostatečně malém okolí bodu x_0.
- Aby mohla mít funkce $f(x)$ derivaci v bodě x_0, musí být definována na nějakém okolí bodu x_0 (včetně bodu x_0)!
- $f'(x_0)$ někdy píšeme jako $\frac{df}{dx}(x_0)$, nebo jako $f'(x)\big|_{x=x_0}$.

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Příklad

Určete derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodech $x_0 \in \mathcal{D}(f)$.

Řešení

Zřejmě je $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$. Pro $x_0 > 0$ je

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.
\end{aligned}
$$

Pro $x_0 = 0$ derivace neexistuje (je to krajní bod definičního oboru, a tudíž v něm neexistuje limita – existuje zde pouze limita zprava). Vypočtěme tedy derivaci zprava:
$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$
Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ tedy má v počátku nevlastní pravostrannou derivaci $f'_+(0) = \infty$, neboli tečna v bodě $x_0 = 0$ je svislá přímka.

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na *proměnnou*, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na *proměnnou*, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Již na první přednášce jsme pomocí binomické věty odvodili vztah pro derivaci monomů

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

podobně můžeme odvodit vztahy pro derivaci dalších elementárních funkcí.

Pokud se na bod x_0 budeme dívat jako na *proměnnou*, potom můžeme derivaci chápat jako zobrazení, které každému bodu x přiřadí hodnotu $f'(x)$ (pokud je tato hodnota vlastní). Tedy $f'(x)$ je opět funkce proměnné x, přičemž pro její definiční obor platí, že

$$\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f).$$

Tedy prozatím odvozené vztahy pro derivace můžeme shrnout jako

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Má-li funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě množiny (např. intervalu) I, pak říkáme, že $f(x)$ je diferencovatelná na I. Např. x^n je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, nebo $\frac{1}{x}$ je diferencovatelná na $(0, \infty)$ a na $(-\infty, 0)$.

Derivace v praxi

rychlost

Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku t_0, a tedy je

$$v(t) = s'(t), \qquad \text{rychlost je derivace dráhy.}$$

Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

zrychlení

Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku t_0, a tedy je

$$a(t) = v'(t), \qquad \text{zrychlení je derivace rychlosti.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

proud

Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna napětí}}{\text{změna času}},$$

je

$$I(t) = U'(t), \qquad \text{proud je derivace napětí.}$$

Vlastnosti a pravidla derivací

V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta

Má-li $f(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.

Vlastnosti a pravidla derivací

V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta

Má-li $f(x)$ v bodě x_0 <u>vlastní</u> derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Protože existuje vlastní $f'(x_0)$ je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \right) = f'(x_0)\,.\,0 + f(x_0) = f(x_0).$$

Je tedy $f(x)$ spojitá v bodě x_0. $\square$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x).$$

3. *Pravidlo součinu:*

$$\left[f(x) \,.\, g(x)\right]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x).$$

3. *Pravidlo součinu:*

$$\left[f(x)\,.\,g(x)\right]' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x).$$

4. *Pravidlo podílu:*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Důkaz.

Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity). Ukážeme pravidlo součinu:

$$
\begin{aligned}
(f\,.\,g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x) + f(x_0)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right\} \\
&= f'(x_0)\,.\,g(x_0) + f(x_0)\,.\,g'(x_0),
\end{aligned}
$$

□