Matematika II – 4. přednáška
Derivace – pravidla, základní věty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

8. 10. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/skript.pdf`).

Plán přednášky

1. Vlastnosti derivací
2. Derivace vyšších řádů
3. Derivace elementárních funkcí

Derivace v praxi

rychlost

Je-li $s(t)$ poloha hmotného bodu na přímce v čase t, potom je výraz

$$\frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

roven průměrné rychlosti za časový úsek $[t_0, t]$. Zřejmě je pak

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

rychlost v okamžiku t_0, a tedy je

$$v(t) = s'(t), \qquad \text{rychlost je derivace dráhy.}$$

Zde je nutné vzít v úvahu, že rychlost $v(t)$ má znaménko, tj. $v(t) > 0$ ve směru pohybu, kdy se $s(t)$ zvětšuje a $v(t) < 0$, když se $s(t)$ zmenšuje.

zrychlení

Protože je zrychlení $a(t)$ změna rychlosti, podobně platí, že

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

je zrychlení v okamžiku t_0, a tedy je

$$a(t) = v'(t), \qquad \text{zrychlení je derivace rychlosti.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

výkon

Protože platí, že

$$\text{výkon} = \frac{\text{změna práce}}{\text{změna času}},$$

je

$$P(t) = W'(t), \qquad \text{výkon je derivace práce.}$$

proud

Protože platí, že

$$\text{elektrický proud} = \frac{\text{změna napětí}}{\text{změna času}},$$

je

$$I(t) = U'(t), \qquad \text{proud je derivace napětí.}$$

Vlastnosti a pravidla derivací

V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta

Má-li $f(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.

Vlastnosti a pravidla derivací

V tomto odstavci odvodíme základní vlastnosti funkce a její derivace a pravidla pro počítání derivací.

Věta

Má-li $f(x)$ v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.

Důkaz.

Chceme ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Protože existuje vlastní $f'(x_0)$ je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \right) = f'(x_0) \, . \, 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

Je tedy $f(x)$ spojitá v bodě x_0. □

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

3. *Pravidlo součinu:*

$$[f(x) \, . \, g(x)]' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x).$$

Pravidla pro derivace

Věta

1. *Pravidlo konstantního násobku:*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

3. *Pravidlo součinu:*

$$[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x).$$

4. *Pravidlo podílu $(g(x) \neq 0)$:*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Věta (Derivace složené funkce)

Má-li funkce $y = f(u)$ *derivaci v bodě* $u_0 := g(x_0)$ *a funkce* $u = g(x)$ *derivaci v bodě* x_0*, potom má* *složená funkce* $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ *derivaci v bodě* x_0 *a platí*

$$(f \circ g)'(x) = f'(u_0)\,.\,g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\,.\,g'(x_0).$$

Intuitivně můžeme pravidlům velice snadno rozumět, když si derivaci funkce $y = f(x)$ představíme jako podíl přírůstků závislé proměnné y a nezávislé proměnné x:

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.

Intuitivně můžeme pravidlům velice snadno rozumět, když si derivaci funkce $y = f(x)$ představíme jako podíl přírůstků závislé proměnné y a nezávislé proměnné x:

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.
U součinu musíme být malinko pozornější. Pro $y = h(x) = f(x)g(x)$ je přírůstek

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x)\end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek Δx, jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očkávat pro derivaci součinu fg výraz $fg' + f'g$.

Důkaz.

Pravidla (i) a (ii) jsou triviální z definice derivace (jako limity). Ukážeme pravidlo součinu:

$$\begin{aligned}
(f\,.\,g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x) + f(x_0)\,.\,g(x) - f(x_0)\,.\,g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right\} \\
&= f'(x_0)\,.\,g(x_0) + f(x_0)\,.\,g'(x_0),
\end{aligned}$$

$\square$

Ještě zajímavější je to pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$. Vhled do problému nám poskytne následující příklad.

Ještě zajímavější je to pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$. Vhled do problému nám poskytne následující příklad.

Příklad

Uvažujme soukolí tří ozubených kol, přičemž kolo A má 12 zubů, kolo B má 4 zuby a kolo C má 6 zubů (viz obr.). Jestliže kolo A udělá y otáček, kolo B udělá u otáček a kolo C udělá x otáček, potom platí

$$y = \frac{1}{3}u, \qquad u = \frac{3}{2}x, \qquad \text{a tedy je} \qquad y = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x.$$

Vidíme, že při <u>skládání funkcí</u> se velikost změn (= derivace) <u>násobí</u>.

Opět vypsáním přírůstků dostáváme

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$.

Důkaz.

Vztah pro derivaci podílu lze snadno odvodit přímo z definice, ukážeme zde ale, jak jej odvodit pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Důkaz.

Vztah pro derivaci podílu lze snadno odvodit přímo z definice, ukážeme zde ale, jak jej odvodit pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Pro funkci $(1/g) = (g^{-1})$ pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že $(g^{-1})' = -g^2 \cdot g'$ a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě kýžený vzorec:

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$

$\square$

Derivace inverzních funkcí

Již dávno jsme formulovali pojem **inverzní funkce**: Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.

Derivace inverzních funkcí

Již dávno jsme formulovali pojem **inverzní funkce**: Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.
Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, vztah pro derivaci složené funkce nám (pro $y = f(x)$) dává

$$1 = (\mathrm{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové)

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Věta

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Věta

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pokud je $f'(x_0) = 0$ izolovaným nulovým bodem derivace $f'(x)$ a inverzní funkce k f na okolí $f(x_0)$ existuje, pak je derivace funkce f^{-1} v bodě $f(x_0)$ nevlastní (přitom je rovna $+\infty$, právě když je f na daném okolí $f(x_0)$ rostoucí).

Příklad

Určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Příklad

Určete derivaci funkce $\sqrt[3]{x}$.

Řešení

Funkce $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ je inverzní k funkci $x = f(y) = y^3$.
Protože $f'(y) = 3y^2$, máme

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Vidíme (ať už z předchozí věty nebo limitním přechodem v předchozím výpočtu), že v bodě $x_0 = 0$ má funkce $\sqrt[3]{x}$ derivaci ∞.

Jiný pohled na derivaci inverzní funkce

Označme jako φ (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $x = f(y)$ v bodě $[y_0, x_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy y a jako ψ (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy x, přičemž platí, že $\operatorname{tg} \varphi = f'(y_0)$ je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\operatorname{tg} \psi = (f^{-1})'(x_0).$$

Jiný pohled na derivaci inverzní funkce

Označme jako φ (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $x = f(y)$ v bodě $[y_0, x_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy y a jako ψ (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy x, přičemž platí, že $\operatorname{tg} \varphi = f'(y_0)$ je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\operatorname{tg} \psi = (f^{-1})'(x_0).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ (promyslete!), pro $\operatorname{tg} \varphi \neq 0$ dostaneme $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$.

Je tedy

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Jiný pohled na derivaci inverzní funkce

Označme jako φ (známý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $x = f(y)$ v bodě $[y_0, x_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy y a jako ψ (neznámý) směrový úhel tečny ke grafu funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $[x_0, y_0]$ vzhledem ke kladnému směru osy x, přičemž platí, že $\operatorname{tg} \varphi = f'(y_0)$ je známá hodnota a my chceme určit neznámou hodnotu

$$\operatorname{tg} \psi = (f^{-1})'(x_0).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ (promyslete!), pro $\operatorname{tg} \varphi \neq 0$ dostaneme $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$.

Je tedy

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Je-li $\operatorname{tg} \varphi = 0$ (tečna ke grafu původní funkce $x = f(y)$ je vodorovná), potom je tečna ke grafu inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ svislá, tj. $(f^{-1})'(x_0)$ je nevlastní.

Plán přednášky

Definice

Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má derivaci druhého řádu v bodě x_0, jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0. Píšeme

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je **dvakrát diferencovatelná** na nějakém intervalu A, jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě.

Definice

Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má derivaci druhého řádu v bodě x_0, jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0. Píšeme

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je **dvakrát diferencovatelná** na nějakém intervalu A, jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě.

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně. Známe již pojem první a druhá derivace a říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f je k-**krát diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo k v bodě x_0, jestliže je $(k-1)$-krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její $(k-1)$-ní derivace má v bodě x_0 derivaci.

Definice

Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má derivaci druhého řádu v bodě x_0, jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0. Píšeme

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je **dvakrát diferencovatelná** na nějakém intervalu A, jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě.

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně. Známe již pojem první a druhá derivace a říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f je k-**krát diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo k v bodě x_0, jestliže je $(k-1)$-krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její $(k-1)$-ní derivace má v bodě x_0 derivaci.

Pro k-tou derivaci funkce $f(x)$ užíváme značení $f^{(k)}(x)$.

Jestliže existují derivace všech řádů na nějakém intervalu, říkáme, že je tam funkce f **hladká**. Většinou se také užívá konvence, že 0-krát diferencovatelná funkce znamená **spojitou funkci**. Pro funkce, jejichž k-tá derivace je spojitá, užíváme označení **třída funkcí** $C^k(A)$ na intervalu A, kde k může nabývat hodnot $0, 1, \dots, \infty$. Často píšeme pouze C^k, je-li definiční obor znám z kontextu.

Diferencovatelnost polynomů a splajnů

Výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Diferencovatelnost polynomů a splajnů

Výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Racionální funkce lomené budou nekonečně diferencovatelné ve všech bodech svého definičního oboru.

Diferencovatelnost polynomů a splajnů

Výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Racionální funkce lomené budou nekonečně diferencovatelné ve všech bodech svého definičního oboru.

Při konstrukci splajnů jsme pohlídali, aby výsledné funkce byly třídy $C^2(\mathbb{R})$. Jejich třetí derivace budou po částech konstantní funkce. Proto nebudou splajny patřit do $C^3(\mathbb{R})$, přestože jejich všechny derivace vyšších řádů budou nulové ve všech vnitřních bodech jednotlivých intervalů v interpolaci. Promyslete si podrobně tento příklad!

Plán přednášky

1. Vlastnosti derivací
2. Derivace vyšších řádů
3. Derivace elementárních funkcí

Zatím máme shromážděny tyto typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,

[1] Později *znovu zadefinujeme* goniometrické funkce pomocí mocninných řad.

Zatím máme shromážděny tyto typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,
- racionální funkce f/g definované na celém $\mathbb{R}$ kromě konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,

[1] Později *znovu zadefinujeme* goniometrické funkce pomocí mocninných řad.

Zatím máme shromážděny tyto typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,
- racionální funkce f/g definované na celém $\mathbb{R}$ kromě konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,
- mocninné funkce x^b s obecným $b \in \mathbb{R}$, definované pro $x > 0$ a hodnotami v $\mathbb{R}$,

[1]Později *znovu zadefinujeme* goniometrické funkce pomocí mocninných řad.

Zatím máme shromážděny tyto typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,
- racionální funkce f/g definované na celém $\mathbb{R}$ kromě konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,
- mocninné funkce x^b s obecným $b \in \mathbb{R}$, definované pro $x > 0$ a hodnotami v $\mathbb{R}$,
- exponenciální funkce a^x o libovolném základu $a > 0$ definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s hodnotami v $\mathbb{R}$ a k nim inverzní funkce logaritmické o základ $a > 0, a \neq 1$,

[1] Později *znovu zadefinujeme* goniometrické funkce pomocí mocninných řad.

Zatím máme shromážděny tyto typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,
- racionální funkce f/g definované na celém $\mathbb{R}$ kromě konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,
- mocninné funkce x^b s obecným $b \in \mathbb{R}$, definované pro $x > 0$ a hodnotami v $\mathbb{R}$,
- exponenciální funkce a^x o libovolném základu $a > 0$ definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s hodnotami v $\mathbb{R}$ a k nim inverzní funkce logaritmické o základ $a > 0, a \neq 1$,
- goniometrické funkce $\sin x, \cos x$ (a funkce $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ od nich odvozené) definované jako souřadnice bodu na jednotkové kružnici, kde $|x|$ je délka oblouku od $[1, 0]$ k $[\cos x, \sin x]$ v příslušném smyslu.[1]

[1] Později *znovu zadefinujeme* goniometrické funkce pomocí mocninných řad.

Derivace mocniny

Víme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$. Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

Derivace mocniny

Víme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$. Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

Věta (Derivace mocniny)

Pro libovolný exponent $r \in \mathbb{R}$ platí, že

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{1}$$

kdykoliv mají uvedené výrazy smysl.

Derivace mocniny

Víme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$. Nyní ukážeme, že stejný vztah platí pro libovolné (reálné) exponenty, nejen pro přirozená čísla.

Věta (Derivace mocniny)

Pro libovolný exponent $r \in \mathbb{R}$ platí, že

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{1}$$

kdykoliv mají uvedené výrazy smysl.

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$. Pak $m = -n \in \mathbb{N}$ a z věty o derivaci složené funkce dostáváme:

$$(x^n)' = ((x^m)^{-1})' = -(x^m)^{-2} mx^{m-1} = -mx^{-2m+m-1} =$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Derivace mocniny – pokr.

Důkaz.

Dále nechť $r = \frac{1}{q}$, kde $q \in \mathbb{N}$ (tj. derivujeme obecnou odmocninu).

Derivaci funkce $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ odvodíme z věty o derivaci inverzní funkce. Označme si $y = f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$ a $x = f(y) = y^q$. Protože je $q \in \mathbb{N}$, je $f'(y) = qy^{q-1}$. Platí tedy, že

$$(x^r)' = (\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Derivace mocniny – pokr.

Důkaz.

Dále nechť $r = \frac{1}{q}$, kde $q \in \mathbb{N}$ (tj. derivujeme obecnou odmocninu).

Derivaci funkce $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ odvodíme z věty o derivaci inverzní funkce. Označme si $y = f^{-1}(x) = \sqrt[q]{x}$ a $x = f(y) = y^q$. Protože je $q \in \mathbb{N}$, je $f'(y) = qy^{q-1}$. Platí tedy, že

$$(x^r)' = (\sqrt[q]{x})' = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Derivaci funkce $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ odvodíme z věty o derivaci složené funkce

$$(x^r)' = \left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right]' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} . \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}} . x^{\frac{1-q}{q}} =$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1+1-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}.$$

Derivace mocniny – dokončení

Důkaz.

Zbývá přejít od racionálního exponentu k obecnému reálnému, což lze udělat buď úvahami o spojitosti nebo se jednoduše později odkázat na výsledky o exponenciálních funkcích (což v tuto chvíli uděláme). $\square$

Derivace goniometrických funkcí

Věta

Pro goniometrické funkce platí

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Derivace goniometrických funkcí

Věta

Pro goniometrické funkce platí

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Důkaz.

Derivaci funkce $\sin x$ vypočteme přímo z definice:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \, \cos h) + \cos x \, \sin h - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\{ (\sin x)\cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + (\cos x)\cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right\} = \cos x.$$

$\square$

Derivace goniometrických funkcí – dokončení

Důkaz.

Derivace ostatních goniometrických funkcí vypočteme z derivace funkce $\sin x$ pomocí jejich vyjádření jako složené funkce či podílu funkcí, jejichž derivaci známe.

Derivace goniometrických funkcí – dokončení

Důkaz.

Derivace ostatních goniometrických funkcí vypočteme z derivace funkce $\sin x$ pomocí jejich vyjádření jako složené funkce či podílu funkcí, jejichž derivaci známe.

$$(\cos x)' = (\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x,$$

Derivace goniometrických funkcí – dokončení

Důkaz.

Derivace ostatních goniometrických funkcí vypočteme z derivace funkce $\sin x$ pomocí jejich vyjádření jako složené funkce či podílu funkcí, jejichž derivaci známe.

$$(\cos x)' = (\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x,$$

dále

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$\square$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí

Věta

Pro exponenciální a logaritmické funkce platí

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a,$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Důkaz.

Derivaci funkce e^x vypočteme z definice za použití základní limity spočítané minulou přednášku:

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \,.\, e^h - e^x}{h} =$$
$$= e^x \,.\, \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \,.\, 1 = e^x.$$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí – pokr.

Důkaz.

Podobně bychom z definice mohli spočítat derivaci funkce a^x pro obecné a, s využitím vyjádření $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ ale snadno vypočteme, že

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}) \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí – pokr.

Důkaz.

Podobně bychom z definice mohli spočítat derivaci funkce a^x pro obecné a, s využitím vyjádření $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ ale snadno vypočteme, že

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}) \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

Podobně, protože logaritmická funkce byla definovaná jako inverzní k exponenciální, pro $y = f^{-1}(x) = \ln x$ a pro $x = f(y) = e^y$ máme $f'(y) = e^y$, takže

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí – pokr.

Důkaz.

Podobně bychom z definice mohli spočítat derivaci funkce a^x pro obecné a, s využitím vyjádření $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ ale snadno vypočteme, že

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}) \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x.$$

Podobně, protože logaritmická funkce byla definovaná jako inverzní k exponenciální, pro $y = f^{-1}(x) = \ln x$ a pro $x = f(y) = e^y$ máme $f'(y) = e^y$, takže

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

a

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$\square$

Derivace mocniny napodruhé

Důsledek

Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ platí

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \qquad x > 0.$$

Důkaz.

Z pravidla pro derivaci složené funkce a z derivace logaritmu plyne, že

$$(x^r)' = \left(e^{r \ln x}\right)' = e^{r \ln x} \,.\, (r \ln x)' = x^r \,.\, r \frac{1}{x} = rx^r \,.\, x^{-1} = rx^{r-1}.$$

$\square$

Další přírůstky – cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým. Protože jsou goniometrické funkce všechny periodické s periodou 2π, jsou jejich inverze definované vždy jen v rámci jedné periody a to ještě jen na části, kdy je daná funkce buď rostoucí nebo klesající. Jsou to funkce

$$\arcsin = \sin^{-1}$$

s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$. Dále

$$\arccos = \cos^{-1}$$

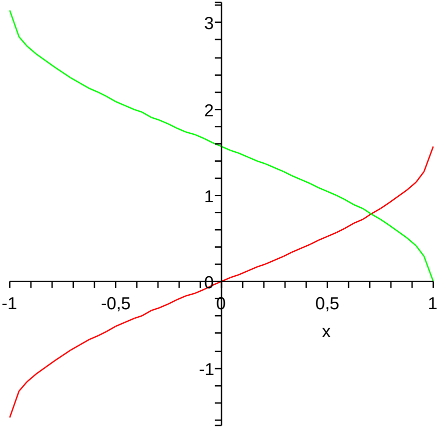
s definičním oborem $[-1, 1]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$.
Zbývají ještě funkce

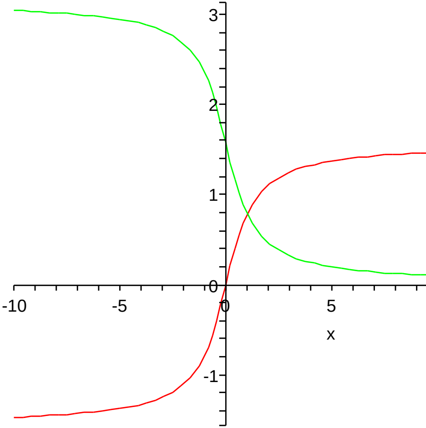
$$\mathrm{arctg} = \mathrm{tg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[-\pi/2, \pi/2]$ a konečně

$$\mathrm{arccotg} = \mathrm{cotg}^{-1}$$

s definičním oborem $[-\infty, \infty]$ a oborem hodnot $[0, \pi]$.





O

Derivace cyklometrických funkcí

Věta

Pro cyklometrické funkce platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivace cyklometrických funkcí

Věta

Pro cyklometrické funkce platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Důkaz.

Derivace všech cyklometrických funkcí vypočteme z pravidla pro derivování inverzní funkce.

Derivace cyklometrických funkcí

Věta

Pro cyklometrické funkce platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Důkaz.

Derivace všech cyklometrických funkcí vypočteme z pravidla pro derivování inverzní funkce.
Pro $y = f^{-1}(x) = \underline{\arcsin x}$ a pro $x = f(y) = \sin y$ máme $f'(y) = \cos y$, a proto dostáváme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Důkaz.

Tento výsledek ale ještě zjednodušíme. Protože pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$, je

$$1 = \left[\cos(\arcsin x)\right]^2 + \left[\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\right]^2 = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Důkaz.

Tento výsledek ale ještě zjednodušíme. Protože pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ je $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$, je

$$1 = \left[\cos(\arcsin x)\right]^2 + \left[\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{=x}\right]^2 = \cos^2(\arcsin x) + x^2,$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A tedy platí, že

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Obdboným způsobem postupujeme i u ostatních cyklometrických funkcí. $\square$

Vlastnosti jednotlivých obyvatelů zvířetníku a jejich vztahy:

funkce	**definiční obor**	**třída**	**derivace**	**inverze**
polynomy f	celé $\mathbb{R}$	C^∞	f' opět polynom	f^{-1} existuje jen lokálně a neumíme obecnou formulí
kubické splajny h	celé $\mathbb{R}$	C^2	h' je opět splajn	formule s odmocninami a jen lokálně
racionální funkce f/g	celé $\mathbb{R}$ mimo kořeny g	C^∞	opět racionální funkce: $\frac{f'g-fg'}{g^2}$	existuje jen lokálně a neumíme obecnou formulí

funkce	definiční obor	třída	derivace	inverze
mocninné funkce x^a	interval $(0, \infty)$	C^∞	funkce ax^{a-1}	existuje všude a je opět mocninnou funkcí $y^{1/a}$
exponenciální funkce a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	celé $\mathbb{R}$	C^∞	existuje všude a je $\ln a \cdot a^x$	logaritmická funkce $\log_a$
goniometrické funkce $\sin x, \cos x$	celé $\mathbb{R}$	C^∞	existuje všude, vzorec známe	cyklometrické funkce, existují lokálně

Věty o střední hodnotě

Odvodíme několik výsledků, které umožní snáze pracovat s funkcemi při modelování reálných problémů.

Věta (Rolleova)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Jestliže platí* $f(a) = f(b)$*, pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že* $f'(c) = 0$*.*

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).

Důkaz.

Funkce f spojitá na uzavřeném intervalu (tj. kompaktní množině) má na něm maximum a minimum. Pokud by maximum i minimum mělo stejnou hodnotu $f(a) = f(b)$, pak by funkce f byla konstantní a tedy i její derivace by byla nulová ve všech bodech intervalu (a, b).
Předpokládejme tedy, že buď maximum nebo mimimum je jiné a nechť nastává jedno z nich ve vnitřním bodě c. Pak ovšem není možné, aby v c bylo $f'(c) \neq 0$, protože to by v tomto bodě byla byla funkce f buď rostoucí nebo klesající a jistě by tedy v okolí bodu c nabývala větších i menších hodnot, než je $f(c)$. □

Z Rolleovy věty snadno vyplývá tzv. **věta o střední hodnotě**.

Věta (Lagrangeova)

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná uvnitř tohoto intervalu. Pak existuje* $c \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek).

Důkaz.

Důkaz je prostým zápisem geometrického významu tvrzení: k sečně mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ existuje tečna, která je s ní rovnoběžná (viz obrázek). Rovnice naší sečny je

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Rozdíl $h(x) = f(x) - g(x)$ udává vzdálenost grafu od sečny (v hodnotách y). Jistě platí $h(a) = h(b)$ a

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předchozí věty existuje bod c, ve kterém je $h'(c) = 0$. $\square$

Věty o střední hodnotě mají celou řadu důsledků týkajících se vlastnosti funkcí. Např.:

- Které funkce mají nulovou derivaci? – Pouze konstantní funkce.
- Které funkce mají stejnou derivaci? – Právě ty funkce, které se navzájem liší o konstantu.

Důsledek

Je-li $f(x)$ *diferencovatelná na* (a, b) *a je-li* $f'(x) = 0$ *na* (a, b), *potom*

$$f(x) \equiv c \quad na\ (a, b).$$

Důkaz.

Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, platí, že $f(x)$ je spojitá na $[x_1, x_2]$ (neboť existuje vlastní $f'(x)$) a diferencovatelná na (x_1, x_2). Podle Lagrangeovy věty je pak pro nějaký bod $c \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) = f(x_2).$$

A protože byly body x_1 a x_2 vybrány libovolně v intervalu (a, b), musí být nutně $f(x)$ konstantní na intervalu (a, b). $\square$

Důsledek

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ diferencovatelné na (a, b) a je-li $f'(x) = g'(x)$ na (a, b), potom $f(x) = g(x) + c$ na (a, b), tj. $f(x)$ a $g(x)$ se liší o konstantu.

Důkaz.

Funkce $(f - g)(x)$ je diferencovatelná na (a, b) a $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ na (a, b). Podle předchozího důsledku je pak $f(x) - g(x) \equiv c$ na (a, b), tj. $f(x) = g(x) + c$ na (a, b). $\square$