

# Matematika II – 8. přednáška

## Primitivní funkce, neurčitý integrál

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

5. 11. 2008

# Obsah přednášky

- 1 Primitivní funkce
- 2 Základní integrační metody
  - Metoda per partes
  - Substituční metody
  - Integrovaní racionálních lomených funkcí

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB102, e-text.

## Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB102, e-text.

# Plán přednášky

## 1 Primitivní funkce

## 2 Základní integrační metody

- Metoda per partes
- Substituční metody
- Integrovaní racionálních lomených funkcí

Předpokládejme, že známe na intervalu  $[a, b]$  reálnou funkci  $F(x)$  reálné proměnné  $x$  a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $n$  částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech  $x_i$  výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Předpokládejme, že známe na intervalu  $[a, b]$  reálnou funkci  $F(x)$  reálné proměnné  $x$  a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $n$  částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech  $x_i$  výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součtem

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Funkci  $F$  nazýváme **antiderivace** nebo **primitivní funkce** k funkci  $f$ , množinu všech takových funkcí nazveme **neurčitým integrálem** funkce  $f$ .

Antiderivace reálné funkce  $f(x)$  zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce  $f$ , souřadnou osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou  $x$ !).



Antiderivace reálné funkce  $f(x)$  zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce  $f$ , souřadnou osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou  $x$ !).

Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot antiderivace v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se také říká **Newtonův integrál**. Píšeme

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

## Poznámka

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost antiderivace. Tu obecně není snadné spočítat i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím  $f$  existuje. Proto budeme napřed diskutovat jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu  $[a, b]$  určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ , pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě  $a$  dává

$$F(x) - G(x) = \text{konst.}$$

na celém intervalu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu  $[a, b]$  určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ , pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě  $a$  dává

$$F(x) - G(x) = \text{konst.}$$

na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu  $[a, b]$  určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ , pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě  $a$  dává

$$F(x) - G(x) = \text{konst.}$$

na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x) dx + C.$$

### Příklad

Protože mají funkce  $F(x) = \arctg x$  a  $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$  stejnou derivaci  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , musí se tyto funkce lišit o konstantu. Konstantu  $C$  můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě  $x = 0$ ,  $\arctg 0 = 0$ ,  $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$ , neboli platí  $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

- (a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .

## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

- (a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .
- (b) Funkce  $\ln x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$ .



## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

- (a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .
- (b) Funkce  $\ln x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$ .
- (c) Funkce  $\operatorname{arctg} x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{1+x^2}$  na  $\mathbb{R}$ .

## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

- (a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .
- (b) Funkce  $\ln x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$ .
- (c) Funkce  $\operatorname{arctg} x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{1+x^2}$  na  $\mathbb{R}$ .
- (d) Funkce  $\arcsin x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  na  $(-1, 1)$ .

## Definice

Nechť  $f(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , pokud

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

- (a) Funkce  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$  je primitivní k funkci  $x^n$  na  $\mathbb{R}$ .
- (b) Funkce  $\ln x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{x}$  na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$ .
- (c) Funkce  $\arctg x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{1+x^2}$  na  $\mathbb{R}$ .
- (d) Funkce  $\arcsin x$  je primitivní k funkci  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  na  $(-1, 1)$ .
- (e) Funkce  $C$  (konstantní funkce) je primitivní k funkci  $0$  na  $\mathbb{R}$ .

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci  $f(x)$  existuje primitivní funkce  $F(x)$ ? Ne vždy!

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci  $f(x)$  existuje primitivní funkce  $F(x)$ ? Ne vždy!

## Věta

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $I$ , potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

## Důkaz.

Později. □

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci  $f(x)$  existuje primitivní funkce  $F(x)$ ? Ne vždy!

## Věta

*Je-li funkce  $f(x)$  spojitá na intervalu  $I$ , potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

## Důkaz.

Později. □

## Poznámka

Věta udává pouze postačující podmínku pro existenci primitivní funkce, spojitost **není** podmínkou nutnou!

Např. funkce  $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  není spojitá v bodě  $x = 0$ , přitom snadno spočítáme, že funkce  $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ , pro  $x \neq 0$ , a  $F(0) = 0$  je k  $f(x)$  primitivní.

# Tabulkové integrály

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{a}{x} dx = a \ln x + C$$

$$\int a \cos bx dx = \frac{a}{b} \sin bx + C$$

$$\int a \sin bx dx = -\frac{a}{b} \cos bx + C$$

$$\int a \cos bx \sin^n bx dx = \frac{a}{b(n+1)} \sin^{n+1} bx + C$$

$$\int a \sin bx \cos^n bx dx = -\frac{a}{b(n+1)} \cos^{n+1} bx + C$$

$$\int a \operatorname{tg} bx dx = -\frac{a}{b} \ln(\cos bx) + C$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

### Poznámka

V posledním vzorci si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro  $x > 0$  je  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  a pro  $x < 0$  je  $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .



# Plán přednášky

## 1 Primitivní funkce

## 2 Základní integrační metody

- Metoda per partes
- Substituční metody
- Integrovaní racionálních lomených funkcí

## Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

*Neboli, je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$ , potom je  $c \cdot F(x)$  primitivní k  $c \cdot f(x)$ .*

## Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx.$$

*Neboli, je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$ , potom je  $c \cdot F(x)$  primitivní k  $c \cdot f(x)$ .*

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

*Neboli, je-li  $F(x)$  primitivní k  $f(x)$  a je-li  $G(x)$  primitivní k  $g(x)$ , potom je  $F(x) \pm G(x)$  primitivní k  $f(x) \pm g(x)$ .*

# Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

## Věta

*Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $I$ . Potom platí*

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.$$

# Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

## Věta

*Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají derivaci na intervalu  $I$ . Potom platí*

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx.$$

## Důkaz.

Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu:  $[u v]' = u' v + u v'$ ,  $\Rightarrow \int [u v]' = \int (u' v + u v')$   $\Rightarrow u v = \int u' v + \int u v'$ . □

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čary.

### Příklad

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u' = \cos x \\ v = x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u = \sin x \\ v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx = \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čary.

### Příklad

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx = \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

### Příklad

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Metoda per partes občas vyžaduje i použití některých (i když dnes už dostatečně *profláknutých*) triků:

### Příklad

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$



## Příklad

$$\underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{\text{označme jako } I} = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = \sin x \end{array} \quad \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = \cos x \end{array} \quad \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = -\sin x \end{array} \right|$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{=I},$$

pro neznámý integrál  $I$  tedy dostáváme rovnici

$$I = e^x (\sin x - \cos x) - I, \text{ odkud snadno dopočteme}$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \cos(ax) dx, \quad \int x^n \sin(ax) dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) dx, \quad \int x^a \ln^n x dx.$$

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \cos(ax) dx, \quad \int x^n \sin(ax) dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) dx, \quad \int x^a \ln^n x dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx) dx.$$

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \cos(ax) dx, \quad \int x^n \sin(ax) dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax) dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax) dx, \quad \int x^a \ln^n x dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx) dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rekurentní formuli pro neznámý integrál (viz následující příklad).

## Příklad

Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx.$$

## Příklad

Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx.$$

## Řešení

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2 + 1)^{-n} & v' = -n(x^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2x \end{array} \right| \\ &= x(x^2 + 1)^{-n} - \int x \cdot (-n)(x^2 + 1)^{-n-1} \cdot 2x dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \left( \frac{1}{(x^2 + 1)^n} - \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}} \right) dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n [K_n(x) - K_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

### Příklad (Dokončení)

Z rovnice snadno dopočteme  $K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot K_n(x)$ , odkud je pak možné iterativně počítat hodnoty  $K_n$ , např. volbou  $n = 1$  vypočítáme integrál  $K_2(x)$ :

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot K_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.



# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce  $f(t)$  definovaná na intervalu  $I$  a nechť  $\varphi(x)$  je definovaná na intervalu  $J$  a  $\varphi(J) \subseteq I$ . Je-li funkce  $F(t)$  primitivní k funkci  $f(t)$  na intervalu  $I$ , potom je funkce  $(F \circ \varphi)(x)$  primitivní k funkci  $[(f \circ \varphi)(x)] \cdot \varphi'(x)$  na intervalu  $J$ , tj.*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad \left[ = F(t) = F(\varphi(x)) \right].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci  $t = \varphi(x)$ .*

# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce  $f(t)$  definovaná na intervalu  $I$  a nechť  $\varphi(x)$  je definovaná na intervalu  $J$  a  $\varphi(J) \subseteq I$ . Je-li funkce  $F(t)$  primitivní k funkci  $f(t)$  na intervalu  $I$ , potom je funkce  $(F \circ \varphi)(x)$  primitivní k funkci  $[(f \circ \varphi)(x)] \cdot \varphi'(x)$  na intervalu  $J$ , tj.*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \quad \left[ = F(t) = F(\varphi(x)) \right].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci  $t = \varphi(x)$ .*

## Důkaz.

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$



Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

### Příklad

$$\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt =$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2 + 1} + C$$

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

### Příklad

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \\ &= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2 + 1} + C\end{aligned}$$

### Příklad

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x^3 dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \\ &= \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin x^3 + C.\end{aligned}$$

# Substituce podruhé

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce  $f(x)$  definovaná na intervalu  $I$  a nechť  $\psi(t)$  má nenulovou derivaci na intervalu  $J$  a  $\psi(J) = I$ . Je-li funkce  $F(t)$  primitivní k funkci  $[(f \circ \psi)(t)] \cdot \psi'(t)$  na intervalu  $J$ , potom je funkce  $(F \circ \psi^{-1})(x)$  primitivní k funkci  $f(x)$  na intervalu  $I$ , tj.*

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = \left[ = F(t) = F(\psi^{-1}(x)) \right].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci  $x = \psi(t)$ , tj.  
 $t = \psi^{-1}(x)$  (inverzní funkce).*

## Poznámka

Všimněme si, že ve vzorcích pro integraci pomocí substituce **v obou případech** vystupuje diferenciál funkce:

- $t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx.$
- $x = \psi(t) \Rightarrow dx = \psi'(t) dt.$

Rozdíl mezi oběma metodami je v tom, že v prvním případě je nová proměnná funkcí původní proměnné, ve druhém případě je tomu naopak.

## Příklad

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t) dt \end{array} \right| = \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t dt}_{dx} = \\
 &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \\
 &= \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt = \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} (\sin t)(\cos t) + C = \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} (\sin t) \sqrt{1-\sin^2 t} + C = \quad | \quad t = \arcsin x \quad | = \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

# Racionální lomené funkce

Je-li  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$  racionální lomená funkce, provedeme nejprve dělení, abychom dostali ryze lomenou funkci.

## Příklad

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\substack{\text{umíme} \\ \text{integrovat}}} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$



# Racionální lomené funkce

Je-li  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$  racionální lomená funkce, provedeme nejprve dělení, abychom dostali ryze lomenou funkci.

## Příklad

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\substack{\text{umíme} \\ \text{integrovat}}} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

Dále ryze racionální lomenou funkci rozložíme na parciální zlomky, které mají jeden z následujících tvarů.

## Parciální zlomky

- Pro reálný jednoduchý kořen  $x_0$ :

$$\frac{A}{x - x_0}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{A}{x - x_0} dx = A \ln |x - x_0|.$$

## Parciální zlomky

- Pro reálný jednoduchý kořen  $x_0$ :

$$\frac{A}{x - x_0}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{A}{x - x_0} dx = A \ln |x - x_0|.$$

- Pro reálný vícenásobný kořen  $x_0$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}, \quad \frac{B}{(x - x_0)^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{C}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad \text{pro } k \geq 2:$$

$$A \int (x - x_0)^{-k} dx = A \frac{(x - x_0)^{-k+1}}{-k + 1} = \frac{A}{(1 - k)(x - x_0)^{k-1}}.$$

## další typ parciálních zlomků

Pro dvojici jednoduchých komplexně sdružených kořenů  $\alpha \pm \beta i$ :

$$\frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \Rightarrow \quad \int \frac{Bx + C}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar  $t^2 + 1$ , kde  $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$ . Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\begin{aligned} \int \frac{Dt + E}{t^2 + 1} dt &= D \int \frac{t}{t^2 + 1} dt + E \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{D}{2} \ln(t^2 + 1) + E \arctg t. \end{aligned}$$

## poslední typ parciálních zlomků

Pro dvojici vícenásobných komplexně sdružených kořenů  $\alpha \pm \beta i$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{Bx + C}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n}, \quad \frac{Dx + E}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{Fx + G}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{pro } k = 2, \dots, n: \int \frac{Bx + C}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k} dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar  $(t^2 + 1)^k$ , kde  $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$ . Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Ht + J}{(t^2 + 1)^k} dt = H \int \frac{t}{(t^2 + 1)^k} dt + J \int \frac{1}{(t^2 + 1)^k} dt,$$

přičemž první z uvedených integrálů vypočteme substitucí  $s = t^2 + 1$  (potom  $ds = 2t dt$ ) a druhý z uvedených integrálů je integrál  $K_n(x)$  z dříve řešeného příkladu (přesněji v tomto případě  $K_k(t)$ ), který vede na rekurentní formuli.

## Příklad

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx.$$

## Příklad

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx.$$

## Řešení

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

## Příklad

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx.$$

## Řešení

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Odsud plyne, že  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$  a tedy je

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x + 1)^2 (x^2 + 4)} dx &= \int \left( \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{-2}{x + 1} - \ln |x + 1| + \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{-2}{x + 1} - \ln |x + 1| + \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$



## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech prof. Slováka.

## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech prof. Slováka.
- Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{x}{\ln x} dx, \int \sin(x^2) dx,$$

$$\int \cos(x^2) dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int e^{x^2} dx.$$

Z věty o existenci primitivní funkce ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech prof. Slováka.
- Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{x}{\ln x} dx, \int \sin(x^2) dx,$$
$$\int \cos(x^2) dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int e^{x^2} dx.$$

Z věty o existenci primitivní funkce ale víme, že k uvedeným funkcím existuje primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají vyšší funkce (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

- Pozor ale na  $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$ , (není to vyšší funkce)!