Matematika 2 **A**
6. ledna 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (4 body) Uveďte integrální kritérium pro určení konvergence (resp. divergence) číselné řady s nezápornými členy. S využitím tohoto kritéria určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro něž řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ konverguje. Své tvrzení zdůvodněte.

Řešení: viz s.103 ve skriptech doc. Hilschera (Věta 43 a Příklad 140), řada konverguje pro $a < -1$.

2. (3 body) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Pomoci může Stirlingova aproximace – mj. v *cheatu* – , z níž plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$).

Řešení: Snadnou úpravou z uvedeného vztahu s využitím toho, že $\sqrt[n]{n} \to 1$, vyjde limita rovná e.

3. (7 bodů) Přesýpací hodiny mají tvar tělesa vzniklého rotací arcussinusoidy kolem osy y. Jejich horní část je z poloviny objemu plná písku, který se sype dolů rychlostí $1\,\mathrm{cm}^3$ za $10\,\mathrm{s}$. Kolik času zbývá do jeho úplného přesypání?

(Nápověda: Použijte inverzní funkci.)

Řešení: Funkce arcsin je definována na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a nabývá zde všech hodnot z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Rotací kolem osy y dostaneme stejné těleso jako rotací grafu funkce sin kolem osy x (přesněji části grafu pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Objem hodin je pak roven $V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi^2}{2}$ (je rovněž možné počítat jako dvojnásobek objemu poloviny tělesa pro x od 0 do $\frac{\pi}{2}$, intergrál se snadno spočítá pomocí vyjádření $1 - 2\sin^2(x) = \cos(2x)$). Výsledek příkladu pak je $\frac{5\pi^2}{4}$.

4. (7 bodů) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$. Tj. určete:

(a) Definiční obor. **Řešení:** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

(b) Sudost, lichost, periodičnost. **Řešení:** nic z toho

(c) Body nespojitosti a jejich druh. **Řešení:** x=2, jde o skok (limita zleva je $\frac{\pi}{2}$, zprava $-\frac{\pi}{2}$).

(d) Nulové body. **Řešení:** $[0, 0]$

(e) Kladnost, zápornost. **Řešení:** Kladné pro $x \in (0, 2)$.

(f) Intervaly monotonie, lokální extrémy a jejich typ, obor hodnot.
Řešení: $f'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$, stacionární body žádné, funkce roste v každém bodě definičního oboru. Oborem hodnot je $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{-\frac{\pi}{4}\}$ ($-\frac{\pi}{4}$ je pouze limitou funkce v $\pm\infty$).

(g) Konvexnost, konkávnost, inflexní body.
Řešení: $f''(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2-2x+2)^2}$, je tedy f konvexní pro $x < 1$, konkávní pro $x > 1$, 1 je inflexní bod.

(h) Asymptoty (se směrnicí i bez směrnice).

Řešení: Bez směrnice nejsou, se směrnicí je asymptota jediná $y = -\frac{\pi}{4}$ ($\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty} = 0$).

(i) Načrtněte graf.

Řešení: Viz např. `http://user.mendelu.cz/~marik/maw/index.php?lang=cs&form=prubeh`

5. (6 bodů) Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}.$$

Řešení: Např. pomocí vynásobení integračním faktorem $\mu(x) = e^{\int 1/x\,dx} = x$, odkud $yx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ a $y = \frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}} + \frac{C}{x}$.

6. (3 body) Určete

(a) $\inf \mathbb{N} = \inf \ \{1, 2, 3, \dots, \}$. **Řešení:** 1

(b) $\sup \left\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$. **Řešení:** 0

(c) Taylorův polynom 3. stupně funce $\sin(\cos x)$ se středem v $x_0 = 0$.

Řešení: $\sin 1 - \cos 1 \frac{x^2}{2!}$