MB102 – 2. demonstrovaná cvičení
Motivační příklady

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22.9. 2008

Plán přednáky

Příklad 1. *Napište parametrické i neparametrické rovnice tečny $p_s(t)$ křivky (spirály) $c(s) = (\cos(s), s, \sin(s))$ pro pevnou hodnotu parametru s. Rovnice dále uvažte jako zobrazení $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(s, t) \mapsto p_s(t)$ a spočtěte parciální derivace tohoto zobrazení.*

Příklad 1. *Napište parametrické i neparametrické rovnice tečny $p_s(t)$ křivky (spirály) $c(s) = (\cos(s), s, \sin(s))$ pro pevnou hodnotu parametru s. Rovnice dále uvažte jako zobrazení $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(s, t) \mapsto p_s(t)$ a spočtěte parciální derivace tohoto zobrazení.*

Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= \cos(s) - t\sin(s) \\ y &= s + t \\ z &= \sin(s) + t\cos(s) \end{aligned}$$

Neparametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x + \sin(s)y &= \cos(s) + s\sin(s) \\ y - t\cos(s) &= \sin(s) - t\cos(s) \end{aligned}$$

Parciální derivace zobrazení ψ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial s} &= (-\sin(s) - t\cos(s), t, \cos(s) - t\sin(s)) \\ \frac{\partial\psi(s,t)}{\partial t} &= (-\sin(s), 1, \cos(s))\end{aligned}$$

Příklad 2. *Určete, zda tečná rovina ke grafu funkce* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \ln(y)$ *v bodě* $[1, \frac{1}{e}]$ *prochází bodem* $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

Příklad 2. *Určete, zda tečná rovina ke grafu funkce $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot \ln(y)$ v bodě $[1, \frac{1}{e}]$ prochází bodem $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.*

Řešení. Určíme nejdříve parciální derivace: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{y}$, jejich hodnoty v bodě $(1, \frac{1}{e})$ jsou -1, e, dále $f(1, \frac{1}{e}) = -1$. Rovnice tečné roviny je tedy

$$\begin{aligned} z &= f\left(1, \frac{1}{e}\right) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\left(1, \frac{1}{e}\right)(x + 1) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\left(1, \frac{1}{e}\right)\left(y - \frac{1}{e}\right) \\ &= -1 - x + ey. \end{aligned}$$

Této rovnici daný bod nevyhovuje, v tečné rovnině tedy neleží. □

Příklad 3. *Zintegrujte vektorový integrál* $\int_0^{2\pi} c(t)\,\mathrm{d}t$*, kde* $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Příklad 3. *Zintegrujte vektorový integrál* $\int_0^{2\pi} c(t)\,\mathrm{d}t$, *kde* $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Řešení. $(0, 0)$ $\square$

Plán přednáky

Příklad 1. *Určete Taylorův polynom druhého řádu funkce* $\ln(x^2y)$ *v bodě* $[1,1]$.

Sylvestrovo kriterium positivní definitnosti.

Symetrická čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ je positivně (semi)definitní, jestliže jsou všechny její vedoucí hlavní minory kladné (nezáporné).

Důsledek. Symetrická čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ je negativně (semi)definitní, jestliže její vedoucí hlavní minory střídají znaménka (případně jsou nulové), počínaje znaménkem mínus.

Příklad 2. *Určete extrémy funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x^2y - xy - x$

Příklad 2. *Určete extrémy funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x^2y - xy - x$

Řešení. $f_x = 2xy - y - 1$, $f_y = x^2 - x$, $Hf = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$.
Stacionární body $(0, -1)$, $(1, 1)$, v obou je Hessián indefinitní, tedy funkce extrémy nemá. $\square$

Příklad 3 . *V rovině* $x + 2y + z = 1$ *v* $\mathbb{R}^3$ *určete bod, který má nejmenší vzdálenost od bodu* $(1, 1, 1)$.