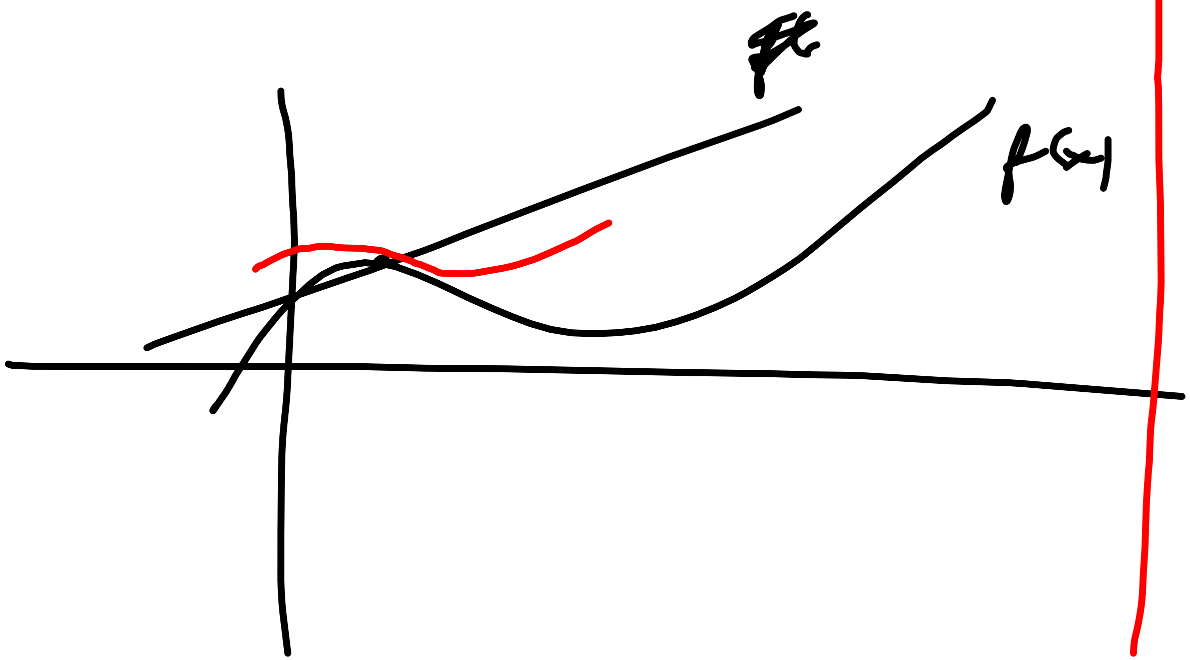
$x = \cos(s) - s\sin(s)$

$y = s\sin(s)$

$\dot{s} = \sin(s) + s\cos(s)$

$\dot{s} - y \cdot \cos(s) = -s\cos(s) + \sin(s)$



Spočítáme parciální derivace:

$$\ln(x^2y) = f(x,y)$$

$$\frac{\partial \ln(x^2y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2y}\cdot 2xy = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial \ln(x^2y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2y}\cdot x^2 = \frac{1}{y}$$

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^+$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$$

$$T^2_{[1,1]} \ln(x^2 y) = \underbrace{\ln(1^2 \cdot 1) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(1,1)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(1,1)\cdot(y-y_0)}_{\text{Tečná rovina}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x-x_0,\ y-y_0\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 2(x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}(x-1,\ y-1)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= 2x + y - 3 - (x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2$$

$f = f(x_1, \dots, x_n)$ $\qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

V kritickém bodě fce $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \, , \; i = 1, \dots, n \right)$ platí:

Hf zadává v bodě $(y_1, \dots, y_n)$

i) positivně definitní kv. formu $\qquad x \neq 0$

$\Rightarrow$ f má minimum $\qquad x^T (Hf) x > 0$

ii) negativně definitní

$\Rightarrow$ f má maximum

iii) indefinitní

$\Rightarrow$ f nemá v $(y_1, \dots, y_n)$ extrém

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T A x > 0$$

1, Spočítáme první parciální derivace a zjistíme, kdy jsou rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - x$$

Řešíme tedy soustavu:

$$2xy - y - 1 = 0$$

$$x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$$

a, $x = 0$: dosazením do 1. rce:

$$-y - 1 = 0 \iff y = -1$$

b, $x = 1$: $2y - y - 1 = 0 \iff y = 1$

Stac. body jsou $[1,1]$ a $[0,-1]$.

Zkoumejme bod $[0, -1]$:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|-2| = -2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$\Rightarrow$ forma je indefinitní

$\Rightarrow$ extrém nenastává

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(2xy - y - 1)}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(x^2 - x)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xy - y - 1)}{\partial y} = 2x - 1$$

$$= \frac{\partial(x^2 - x)}{\partial x}$$

V bodě $[1,1]$ je

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

<u>indefinitní</u> $\Rightarrow$ opět není extrém.

Zjistíme, kdy funkce vzdálenosti obecného bodu v dané rovině nabývá svého minima:

Obecný bod: $x = x$
$y = y$
$z = 1 - x - 2y$

Uvažujme čtverec vzdálenosti od bodu $(1,1,1)$:

$$f(x,y) = \rho^2(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 =$$
$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+2y)^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x-1) + 2(x+2y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y-1) + 4(x+2y)$$

Řešíme soustavu

$$2(x-1)+2(x+2y)=0 \iff 4x+4y-2=0$$
$$2(y-1)+4(x+2y)=0 \iff 4x+10y-2=0$$

$$6y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

stacionární bod je $[\frac{1}{2},0]$.

Spočítejme Hesián v tomto bodě

$$Hf = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \qquad |4|>0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$\Rightarrow$ $Hf(\frac{1}{2},0)$ je pozitivně definitní

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ má v bodě $[\frac{1}{2},0]$ minimum.

V dané rovině jsme tedy získali bod $\left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]$.
Vzhledem vektor $\left([1,1,1]-\left[\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$
je normálovým vektorem dané roviny.