Spočítáme parciální derivace:

$$f_x(x,y) = 2xy + y^2 - y$$

$$f_y(x,y) = x^2 + 2xy - x$$

Určíme stacionární body:

$$2xy + y^2 - y = 0$$

$$x^2 + 2xy - x = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$y^2 - x^2 + x - y = 0$$

$$(y-x)(y+x) - (y-x) = 0$$

$$(y-x)(x+y-1) = 0 \Rightarrow$$

a) $x = y$ obě rovnice v tomto případě přechází na

$$2x^2 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$$

stacionární body $[0,0]$ a $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

b) $x+y=1$

$$2xy+y^2-y=0$$
$$x^2+2xy-x=0$$

$$x^2+y^2+4xy-x-y=0$$
$$(x+y)^2+2xy-(x+y)=0$$
$$1+2xy-1=0$$
$$2xy=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$$

dvě řešení $[0,1]$, $[1,0]$

Abychom rozhodli, jestli ve stacionárních bodech nastává extrém, vyšetříme v daných bodech definitnost Hessiánu dané fce.

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$f_{xx} = 2y \qquad f_{xy} = 2x + 2y - 1$

$f_{yy} = 2x \qquad f_{yx} = 2x + 2y - 1$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

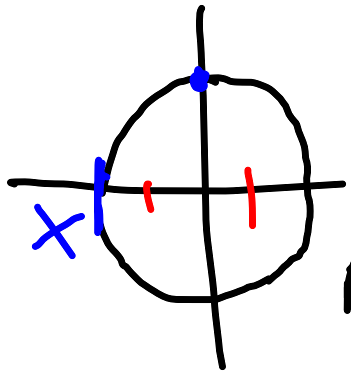
Forma je positivně definitní ⇔ determinanty hlavních minorů jsou kladné.

Hessiány dané fce jsou indefinitní formy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, v bodě $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ je Hessián positivně def. formou, tj. funkce má v tomto bodě lokální minimum.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x\ y)\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} =$$

$$= ax^2 + \underset{b=c}{bxy} + cxy + dy^2$$



$x^2 + y^2 = 1$

$y = \sqrt{1-x^2}$

pro okolí bodu $(0,1)$

$$F(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$$

$$F_y = e^x \cos(y) + e^y \cos(x) \qquad F_x = e^x \sin y + e^y \sin(x)$$

$$F_y(0,0) = 1 + 1 = \underline{2} \neq 0$$

tzn. v okolí bodu $(0,0)$ existuje fce $f: R \to R$, tak, že je splněna rce $F(x, f(x)) = 1$.

Aniž danou funkci explicitně vyjádříme, jsme schopni spočítat její derivaci v bodě 0:

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{0}{2} = 0$$

Derivace fce f v bodě 0 je 0.

$F_z(x,y,z) = y\cos(yz) + x\cos(zx)$

$F_z\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$

sledně F zadává v okolí bodu $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$ funkci $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že $F(x,y,f(x,y)) = 0$.

$$f_x\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) = -\frac{F_x\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)}{F_z\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)} = 0$$

$$f_y\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) = 0$$

$F_x(x,y,z) = y\cos(xy) + z\cos(zx)$

$F_y(x,y,z) = x\cos(xy) + z\cos(yz)$

Určování lokálních extrémů převedeme na určování globálních extrému bzw. Lagrangeovy fce.

$$L(x,y,\lambda) = x - 2y - \lambda(y - x^3 - 2x - 1)$$

$$L_x = 1 + 3\lambda x^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 1 - 6x^2 - 4 = 0$$

$$6x^2 + 3 = 0$$

$$L_y = -2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$y - x^3 - 2x - 1 = 0$$

Lagrangeova fce nemá stac. body

Druhý způsob: $y = x^3 + 2x + 1 \Rightarrow$

$$f(x,y) = x - 2x^3 - 4x - 2 = g(x)$$

$$g'(x) = -6x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}$$

fce nemá stac. body.

Daná fce nemá na dané množině (kruhu) extrém.

Funkce $g(x)$ nemá st. body, je však spojitá a na kompaktní množině $\langle 0, 5 \rangle$ nabývá jak svého maxima, tak svého minima. Tyto musí nabýt v krajních bodech tohoto intervalu

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= -3 \\ g(5) &= -153 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

fce $f(x,y)$ má minimum v bodě $(0, 1)$

v bodě $(5, x)$ maximum

---

b) sestavíme Lagr. fci:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= x + 2y + 3z - \lambda_1(z^2 - x^2 - y^2) - \lambda_2(x - y + z + 1)$$

$$L_x = 1 + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$
$$L_y = 2 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad (2)$$
$$L_z = 3 - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \qquad (3)$$
$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad (L_{\lambda_1} = 0)$$
$$x - y + z + 1 = 0 \qquad (L_{\lambda_2} = 0)$$

$$3 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 y = 0 \qquad (1)+(2)$$
$$5 + 2\lambda_1 y - 2\lambda_1 z = 0 \qquad (2)+(3)$$

$(3)-(1): \quad 2 - 2\lambda_1 z - 2\lambda_1 x = 0$

$X := 2\lambda_1 x \quad Y := 2\lambda_1 y \quad Z := 2\lambda_1 z$

$3 + X + Y = 0 \Rightarrow$

$5 + Y - Z = 0 \Rightarrow Z = Y + 5$

$2 - X - Z = 0 \Rightarrow 2 - X - Y - 5 = 0$

$-(X+Y) = 3 \Rightarrow (X+Y) = -3$

$y = x + z + 1$

$(\quad)$