Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Skupina A

Příklad 1. *Určete obecné řešení rovnice*

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}.$$

Řešení. Nejprve vyřešíme zhomogenizovanou rovnici

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Její charakteristický polynom je

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2),$$

s kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = -2$. Obecné řešení zhomogenizované rovnice je tedy

$$c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x},$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

Nyní metodou neurčitých koeficientů nalezneme (nějaké) partikulární řešení původní nehomogenní rovnice. Podle tvaru nehomogenity a protože -2 je kořenem charakteristického polynomu dané rovnice hledáme řešení ve tvaru $y_0 = axe^{-2x}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Dosazením do původní rovnice obdržíme

$$a[-4e^{-2x} + 4xe^{-2x} + 3(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) + 2xe^{-2x}] = e^{-2x},$$

odkud $a = -1$. Partikulárním řešením dané rovnice je tedy funkce $-xe^{-2x}$, obecným řešením potom prostor funkcí $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - xe^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Příklad 2. *Určete počet podgrafů grafu K_5.*

Řešení. Počet podgrafů spočítáme postupně podle počtu v jejich vrcholů:

- $v = 0$. Jde o prázdný graf. Ten je pouze jediný.
- $v = 1$. Jeden vrchol můžeme vybrat pěti způsoby, celkem 5 grafů.
- $v = 2$. Dva vrcholy můžeme vybrat $\binom{5}{2}$ způsoby, mezi vybranými vrcholy pak buď vede nebo nevede hrana. Celkem $\binom{5}{2}2$ grafů.
- $v = 3$. Tři vrcholy můžeme vybrat $\binom{5}{3}$ způsoby, mezi každými dvěma vybranými vrcholy buď vede, nebo nevede hrana, celkem $\binom{5}{3} \cdot 2^{\binom{3}{2}}$ grafů.
- $v = 4$. $\binom{5}{4} \cdot 2^{\binom{4}{2}}$ grafů.
- $v = 5$. $\binom{5}{5} \cdot 2^{\binom{5}{2}}$ grafů.

Celkem 1550 podgrafů grafu K_5. □

Příklad 3. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly $1, 2, \dots 6$ a každou hranu $\{i, j\}$ ohodnoťme číslem $[(i + j) \bmod 3] + 1$. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

Řešení. Hrany s ohodnocením jedna tvoří kružnici 12451 délky čtyři a hranu 36. Jde tedy o nesouvislý podgraf daného grafu. Není tedy možné vybrat kostru daného grafu pouze z hran s ohodnocením jedna. Minimální kostra bude mít tedy součet ohodnocení hran v ní minimálně $4 \cdot 1 + 2 = 6$. Kostru s touto hodnotou skutečně můžeme vybrat. Z hran s ohodnocením 1 můžeme vypustit libovolnou hranu ze zmiňované kružnice a nezávisle přidáme nějakou hranu s ohodnocením dvě, která spojuje v podgrafu hran s ohodnocením jedna komponentu 1245 s komponentou 36. Takové hrany jsou celkem čtyři. Celkem má daný graf $4 \cdot 4 = 16$ různých minimálních koster. □