Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Skupina B

Příklad 1. *Určete obecné řešení rovnice*

$$y'' + y' = 1.$$

Řešení. Charakteristický polynom dané rovnice je $x^2 + x$ s kořeny 0 a -1, obecné řešení zhomogenizované rovnice je tedy $c_1 + c_2 e^{-x}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru ax, $a \in \mathbb{R}$. Po dosazení do původní rovnice dostáváme $a = 1$. Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je $c_1 + c_2 e^{-x} + x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Příklad 2. *Určete počet kružnic v grafu K_5.*

Řešení. Počet kružnic spočítáme postupně podle jejich délky. Nejkratší kružnice může mít délku 3, nejdelší kružnice v K_5 pak délku pět. Kružnice je určena svými vrcholy, tak jak v ní jdou popořadě, přičemž je jedno, který vrchol prohlásíme za počáteční a který za koncový. Počet kružnic je tedy $5 \cdot 4 \cdot 3/3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/4 \cdot 2 + 5!/5 \cdot 2 = 10 + 15 + 12 = 37$. □

Příklad 3. *Označme vrcholy v grafu K_6 postupně čísly* $1, 2, \dots 6$ *a každou hranu* $\{i, j\}$ *ohodnoťme číslem* $[(i + j) \bmod 3] + 1$. *Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

Řešení. Hrany s ohodnocením jedna tvoří kružnici 12451 délky čtyři a hranu 36. Jde tedy o nesouvislý podgraf daného grafu. Není tedy možné vybrat kostru daného grafu pouze z hran s ohodnocením jedna. Minimální kostra bude mít tedy součet ohodnocení hran v ní minimálně $4 \cdot 1 + 2 = 6$. Kostru s touto hodnotou skutečně můžeme vybrat. Z hran s ohodnocením 1 můžeme vypustit libovolnou hranu ze zmiňované kružnice a nezávisle přidáme nějakou hranu s ohodnocením dvě, která spojuje v podgrafu hran s ohodnocením jedna komponentu 1245 s komponentou 36. Takové hrany jsou celkem čtyři. Celkem má daný graf $4 \cdot 4 = 16$ různých minimálních koster. □