Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Skupina C

Příklad 1. *Určete obecné řešení rovnice*

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}.$$

Řešení. Charakteristický polynom rovnice je $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$, jeho kořeny jsou -2 a -3, obecné řešení zhomogenizované rovnice je tedy $c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení hledáme metodou neurčitých koeficientů ve tvaru axe^{-2x}, $a \in \mathbb{R}$ (-2 je kořenem charakteristického polynomu). Dosazením do původní rovnice získáme $a = 1$. Obecné řešení dané rovnice je tedy $c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + xe^{-2x}$. □

Příklad 2. *Kolik minimálně hran může mít šestistěn?*

Řešení. V libovolném mnohostěnu je každá stěna ohraničena minimálně třemi hranami. Každá hrana pak leží ve dvou stěnách. Označíme-li s počet stěn a h počet hran mnohostěnu dostáváme tak odhad $3s \leq 2h$. Pro šestistěn dává tento odhad $18 \leq 2h$, neboli $h \geq 9$. Šestistěn s devíti hranami skutečně existuje, dostaneme jej například „slepením“ dvou stejně velikých pravidelných čtyřstěnů stěnou k sobě. Minimální možný počet hran šestistěnu je tedy devět. □

Příklad 3. *Označme vrcholy v grafu K_7 postupně čísly $1, 2, \dots 7$ a každou hranu $\{i, j\}$, ohodnoťme číslem $[(i + j) \bmod 3] + 1$. Kolik existuje různých minimálních koster v tomto grafu?*

Řešení. Nejlevnější hrany s ohodnocením jedna tvoří podgraf obshahující všechny vrcholy a mající dvě komponenty, které mohou být propojeny nějakou hranou s druhým nejmenším ohodnocením. Minimální kostra má tedy součet ohodnocení jejch hran minimálně $6 \times 1 + 2 = 8$. Kostry s touto hodnotou skutečně existují, je totiž šest hran hodnoty 2, které propojují zmiňované dvě komponenty. Konkrétně jde o komponentu $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ a $\{3, 6\}$. V první komponentě existují právě tři kružnice a to délky 4, přičemž každá ze šesti hran této komponenty leží právě ve dvou kružnicích. Abychom z dané komponenty získali strom, musíme dvě hrany vypustit, to můžeme udělat $6 \cdot 4/2$ způsoby. Celkem dostáváme $12 \cdot 6 = 72$ různých minimálních koster. □