Jméno a příjmení:	

Příklad číslo:	1	2	3	$\sum$
Počet bodů:				

Skupina D

Příklad 1. *Určete obecné řešení rovnice*

$$y'' - y' = 5.$$

Řešení. Charakteristický polynom je $x^2 - x$ s kořeny 1, 0, obecné řešení zhomogenizované rovnice je tedy $c_1 + c_2e^x$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Partikulární řešení hledáme metodou neurčitých koeficientů ve tvaru ax, $a \in \mathbb{R}$, dostáváme $a = -5$. Obecné řešení dané rovnice je tvaru $c_1 + c_2e^x - 5x$. $\square$

Příklad 2. *Určete počet cest mezi dvěma různými pevně vybranými vrcholy v grafu K_7.*

Řešení. Spočítáme cesty postupně podle jejich délky. Cesta délky jedna je jedna (hrana spojující dva vybrané vrcholy). Cest délek dva je pět (vybíráme jeden z pěti zbylých vrcholů, přes který cesta půjde). Cest délek tři je $5 \cdot 4$ (vybíráme v daném pořadí dva vrcholy, přes které cesta půjde), obdobně cest délky čtyři je $5 \cdot 4 \cdot 3$, cest délky pět je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ a konečně cest délky šest je taktéž 5!. Delší cesty v K_7 nejsou. $\square$

Příklad 3. *Označme vrcholy v grafu K_7 postupně čísly $1, 2, \dots 7$ a každou hranu $\{i, j\}$, ohodnoťme číslem $[(i + j) \bmod 3] + 1$. Kolik existuje různých maximálních koster v tomto grafu?*

Řešení. Nejdražší hrany s ohodnocením tři tvoří v daném grafu podgraf obsahující všechny vrcholy a mající dvě komponenty a to dvě kružnice délek tři a čtyři. Pouze z hran s tímto ohodnocením tedy maximální kostru nesložíme. Bude v ní tedy minimálně jedna levnější hrana. Kostry s právě jednou hranou s ohodnocením 2 pak skutečně existují. Existuje šest hran s ohodnocením 2 propojující dvě zmíněné komponenty. Abychom dostali kostru, musíme ještě vypustit po jedné hraně z každé z kružnic. To můžeme udělat $3 \cdot 4 = 12$ způsoby. Celkem máme 72 různých maximálních koster. $\square$