Jméno a příjmení:	

Absence

Příklad číslo:	1	2	3	4	$\sum$
Počet bodů:					

Příklad 1. *Rozhodněte, zda funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y^2 z$ nabývá extrémů na úsečce dané rovnicemi $2x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 0$ a omezením $x \in \langle -1, 2\rangle$. Pokud ano, tak tyto extrémy nalezněte a určete o jaké extrémy se jedná. Všechna svoje rozhodnutí zdůvodněte.*

Řešení. Hledáme extrémy spojité funkce na kompaktní množině, funkce tedy bude nabývat na dané množině jak svého minima tak maxima a to buď v bodech, kde je gradient zkoumané funkce lineární kombinací gradientů funkcí zadávající vazební podmínky, nebo v krajních bodech úsečky. Najděme body splňující podmínku s gradienty:

$$\begin{aligned} 0 &= 2k + l \\ 2yz &= k - l \\ y^2 &= k + 2l \\ 2x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3})$ a $(x, y, z) = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{9})$ (proměnné k a l můžeme samozřejmě dopočítat také, ale nezajímají nás). Krajní body dané úsečky jsou $(-1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ a $(2, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$. Z těchto čtyř bodů nabývá funkce největší hodnoty v prvním z krajních bodů ($f(x, y, z) = \frac{100}{27}$), tam tedy nabývá maxima na dané úsečce a nejmenší hodnoty v druhém z krajních bodů ($f(x, y, z) = -\frac{80}{27}$), tam tedy nabývá svého minima na dané úsečce. □

Příklad 2. *Určete těžiště části elipsy $3x^2 + 2y^2 = 1$ ležící v prvním kvadrantu roviny $\mathbb{R}^2$.*

Řešení. Spočítejme nejprve obsah dané elipsy. Transformací souřadnic $x = \frac{1}{\sqrt{3}}x'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}y'$ s Jakobiánem $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dostaneme

$$S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_0^{\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y'\, \mathrm{d}x' = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}.$$

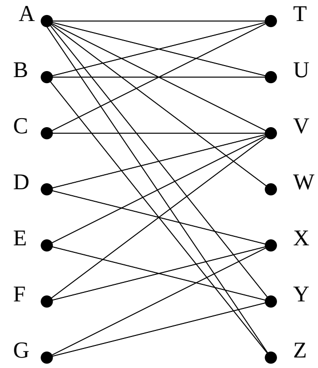
Další potřebné integrály můžeme spočítat přímo v kartézkých souřadnicích x a y:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_0^{\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}} x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1-3t}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_y &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_0^{\sqrt{\frac{1-3x^2}{2}}} y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-3x^2}{2}\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - 3x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

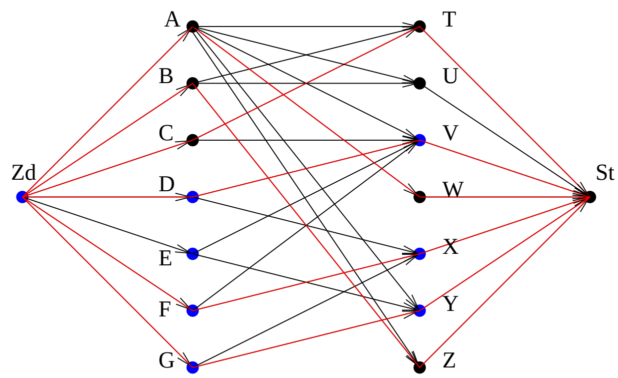
Souřadnice těžiště jsou potom $[\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}, \frac{2\sqrt{2}}{\pi}]$. □

Příklad 3. *Metodou hledání maximálního toku v síti (kterou získáte z daného bipartitního grafu přidáním jistých dvou vrcholů a orientací hran, jak jistě víte) nalezněte maximální párování následujícího bipartitního grafu:*



Pro maximální tok určující Vámi nalezené maximální párování dále určete jemu odpovídající minimální řez v síti.

Řešení. Z daného bipartitního grafu vyrobíme síť přidáním zdroje Zd a stoku St, orientovaných hran $(Zd, A), \dots, (Zd, G)$, $(T, St), \dots, (Z, St)$, stávající hrany orientujeme „abecedně“ od nižšího písmena k vyššímu, všem hranám pak přiřadíme kapacitu 1. Ford-Fulkersonovým algoritmem pak snadno nalezneme některý maximální tok a jemu odpovídající max. párování. Jeden z možných maximálních toků je vyznačen na následujícím obrázku (červené hrany znázorňují tok o velikosti 1 danou hranou zleva do prava):



Odpovídající maximální párování (A, W), (B, Z), (C, T), (D, V), (F, X), (G, Y). Modře jsou v obrázku vyznačeny vrcholy, do nichž existuje rezervní cesta, minimální řez je pak tvořen hranami jdoucích z modrých vrcholů do černých vrcholů, tedy hranami (Zd, A), (Zd, B),(Zd, C),(V, St),(X, St),(Y, St). □

Příklad 4. *Určete jedinou funkci y vyhovující lineární diferenciální rovnici*

$$y^{(3)} - 3y' - 2y = 2e^x,$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

Řešení. Charakteristický polynom je $x^3 - 3x - 2$ s kořeny 2 a dvojnásobným kořenem -1, partikulární řešení hledáme ve tvaru ae^x, $a \in \mathbb{R}$, snadno zjistíme že je jím funkce $-\frac{1}{2}e^x$, obecné řešení dané rovnice je tedy

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} - \frac{1}{2} e^x.$$

Dosazením do počátečních podmínek získáme jedninou funkci vyhovující zadání

$$\frac{2}{9} e^{2x} + \frac{5}{18} e^{-x} + \frac{1}{3} x e^{-x} - \frac{1}{2} e^x.$$

□