

Drsná matematika III — 11. přednáška

Toky v sítích a hry

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

9. 12. 2008

Obsah přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Kde je dobré číst?

- ▶ Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- ▶ Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, <http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/>
- ▶ Bill Cherowitzo, Applied Graph Theory, Lecture Notes, <http://www-math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m4408/m4408f.html>

Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

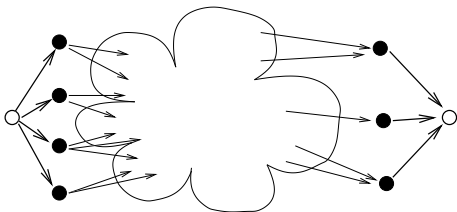
Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Další skupina aplikací jazyka teorie grafů se týká přesunu nějakého měřitelného materiálu v pevně zadané síti. Vrcholy v orientovaném grafu představují body, mezi kterými lze podél hran přenášet předem známá množství, která jsou zadána formou ohodnocení hran. Některé vybrané vrcholy představují **zdroj sítě**), jiné výstup ze sítě. Podle analogie potrubní sítě pro přenos kapaliny říkáme výstupním vrcholům **stok sítě**). Síť je tedy pro nás orientovaný graf s ohodnocenými hranami a vybranými vrcholy, kterým říkáme zdroje a stoky.

Je zřejmé, že se můžeme bez újmy na obecnosti omezit na orientované grafy s jedním zdrojem a jedním stokem. V obecném případě totiž vždy můžeme přidat jeden stok a jeden zdroj navíc a spojit je vhodně orientovanými hranami s všemi zadanými zdroji a stoky tak, že ohodnocení přidaných hran bude zároveň zadávat maximální kapacity jednotlivých zdrojů a stoků. Situace je naznačena na obrázku, kde černými vrcholy nalevo jsou zobrazeny všechny zadané zdroje, zatímco černé vrcholy napravo jsou všechny zadané stoky. Nalevo je jeden přidáný (virtuální) zdroj jako bílý vrchol a napravo jeden stok. Označení hran není v obrázku uvedeno.



Definition

Síť je orientovaný graf $G = (V, E)$ s vybraným jedním vrcholem z nazvaným **zdroj** a jiným vybraným vrcholem s nazvaným **stok**, spolu s nezáporným ohodnocením hran $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. **Tokem** v síti $S = (V, E, z, s, w)$ rozumíme ohodnocení hran $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že součet hodnot u vstupních hran u každého vrcholu v , kromě zdroje a stoku, je stejný jako součet u výstupních hran z téhož vrcholu, tj.

$$\sum_{e \in IN(v)} f(e) = \sum_{e \in OUT(v)} f(e).$$

Velikost toku f je dána celkovou balancí hodnot u zdroje

Definition

Síť je orientovaný graf $G = (V, E)$ s vybraným jedním vrcholem z nazvaným **zdroj** a jiným vybraným vrcholem s nazvaným **stok**, spolu s nezáporným ohodnocením hran $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. **Tokem** v síti $S = (V, E, z, s, w)$ rozumíme ohodnocení hran $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že součet hodnot u vstupních hran u každého vrcholu v , kromě zdroje a stoku, je stejný jako součet u výstupních hran z téhož vrcholu, tj.

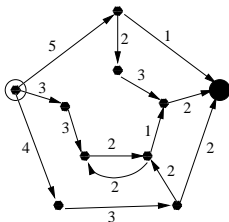
$$\sum_{e \in IN(v)} f(e) = \sum_{e \in OUT(v)} f(e).$$

Velikost toku f je dána celkovou balancí hodnot u zdroje

Z definice je zřejmé, že velikost toku můžeme stejně dobře vypočítat jako hodnotu

$$|f| = \sum_{e \in IN(s)} f(e) - \sum_{e \in OUT(v)} f(e).$$

Na obrázku máme nakreslenou jednoduchou síť se zvýrazněným bílým zdrojem a černým stokem. Součtem maximálních kapacit hran vstupujících do stoku vidíme, že maximální možný tok v této síti je 5.



Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Naší úlohou bude pro zadanou síť na grafu G určit maximální možný tok.

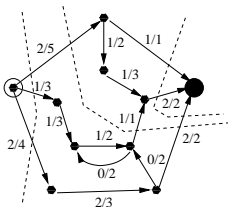
Definition

Řezem v síti $S = (V, E, z, s, w)$ rozumíme takovou množinu hran $C \subset E$, že po jejím odebrání nebude v grafu $G = (V, E \setminus C)$ žádná cesta z z do s . Číslo

$$|C| = \sum_{e \in C} w(e)$$

nazýváme **velikost řezu** C .

Evidentně platí, že nikdy nemůžeme najít větší tok, než je hodnota kteréhokoliv z řezů. Na dalším obrázku máme zobrazen tok sítí s hodnotou 5 a čárkovanými lomenými čarami jsou naznačeny řezy o hodnotách 12, 8 a 5.



Sestavíme funkční algoritmus, který pomocí postupných konstrukcí vhodných cest najde řez s minimální možnou hodnotou a zároveň najde tok, který tuto hodnotu realizuje. Tím dokážeme následující větu:

Theorem

Maximální velikost toku v dané síti $S = (V, E, z, s, w)$ je rovna minimální velikosti řezu v této síti.

Myšlenka algoritmu – prohledáváme cesty mezi uzly grafu a snažíme se je „nasytit“ co největším tokem. Zavedeme si za této účelem terminologii. O neorientované cestě v síti

$S = (V, E, z, s, w)$ z vrcholu v do vrcholu w řekneme, že je **nenasyčená**, jestliže pro všechny hrany této cesty orientované ve směru z v do w platí $f(e) < w(e)$ a $f(e) > 0$ pro hrany orientované opačně. Za **rezervu kapacity** hrany e pak označujeme číslo $w(e) - f(e)$ pro případ hrany orientované ve směru z v do w a číslo $f(e)$ při orientaci opačné. Pro zvolenou cestu bereme za rezervu kapacity minimální rezervu kapacity z jejích hran.

Fordův-Fullkersonův algoritmus

Vstupem je síť $S = (V, E, z, s, w)$ a výstupem maximální možný tok $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▶ *Iniciace*: zadáme $f(e) = 0$ pro všechny hrany $e \in E$ a prohledáváním do šířky z vrcholu z najdeme množinu vrcholů $U \subset V$, do kterých existuje nenasycená cesta;
- ▶ *Hlavní cyklus*: Dokud $s \in U$ opakujeme
 - ▶ zvolíme nenasycenou cestu P ze zdroje z do s a zvětšíme tok f u všech hran této cesty o její minimální rezervu
 - ▶ obnovíme U .
- ▶ na výstup dáme maximální tok f a minimální řez C tvořený všemi hranami vycházejícími z U a končícími v doplňku $V \setminus U$.

Důkaz správnosti algoritmu

Jak jsme viděli, velikost každého toku je nejvýše rovna hodnotě kteréhokoliv řezu. Stačí nám tedy ukázat, že v okamžiku zastavení algoritmu jsme vygenerovali řez i tok se stejnou hodnotou. Algoritmus se zastaví při prvním případě, kdy neexistuje nenasycená cesta ze zdroje z do stoku s . To znamená, že U neobsahuje s a pro všechny hrany e z U do zbytku je $f(e) = w(e)$, jinak bychom museli koncový vrchol e přidat k U .

Důkaz správnosti algoritmu

Jak jsme viděli, velikost každého toku je nejvýše rovna hodnotě kteréhokoliv řezu. Stačí nám tedy ukázat, že v okamžiku zastavení algoritmu jsme vygenerovali řez i tok se stejnou hodnotou.

Algoritmus se zastaví při prvním případě, kdy neexistuje nenasycená cesta ze zdroje z do stoku s . To znamená, že U neobsahuje s a pro všechny hrany e z U do zbytku je $f(e) = w(e)$, jinak bychom museli koncový vrchol e přidat k U .

Zároveň ze stejného důvodu všechny hrany e , které začínají v komplementu $V \setminus U$ a končí v U musí mít tok $f(e) = 0$.

Pro velikost toku celé sítě jistě platí

$$|f| = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) - \sum_{\text{hrany z } V \setminus U \text{ do } U} f(e).$$

Tento výraz je ovšem v okamžiku zastavení roven

$$\sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} w(e) = |C|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro velikost toku celé sítě jistě platí

$$|f| = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) - \sum_{\text{hrany z } V \setminus U \text{ do } U} f(e).$$

Tento výraz je ovšem v okamžiku zastavení roven

$$\sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} w(e) = |C|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Zbývá ovšem ukázat, že algoritmus skutečně zastaví.

Pro velikost toku celé sítě jistě platí

$$|f| = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) - \sum_{\text{hrany z } V \setminus U \text{ do } U} f(e).$$

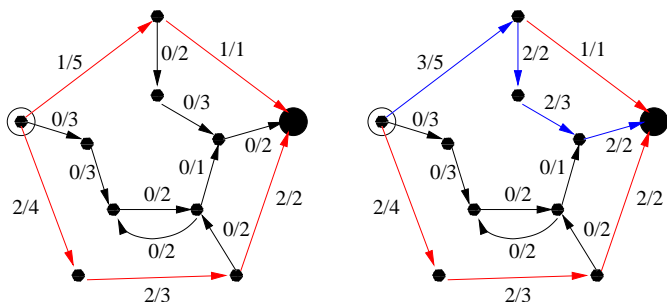
Tento výraz je ovšem v okamžiku zastavení roven

$$\sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} f(e) = \sum_{\text{hrany z } U \text{ do } V \setminus U} w(e) = |C|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Zbývá ovšem ukázat, že algoritmus skutečně zastaví.

Všimněme si, že pro celočíselné hodnoty ohodnocení hran získáme také celočíselný tok.



Chod algoritmu je ilustrován na obrázku. Vlevo jsou vybaveny dvě nejkratší nenasycené cesty ze zdroje do stoku (horní má dvě hrany, spodní tři). Jsou vyznačeny červeně. Napravo je pak nasyčena další cesta v pořadí a je vyznačena modře. Je nyní zjevné, že nemůže existovat další nenasycená cesta ze zdroje do stoku. Proto algoritmus v tomto okamžiku skončí.

Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Můžeme požadovat dodržení maximální kapacity průtoku přes jednotlivé vrcholy. Nebo můžeme chtít dodržet nejen maximální ale také minimální toky přes jednotlivé hrany či vrcholy.

Můžeme požadovat dodržení maximální kapacity průtoku přes jednotlivé vrcholy. Nebo můžeme chtít dodržet nejen maximální ale také minimální toky přes jednotlivé hrany či vrcholy. Přidání kapacit vrcholů je jednoduché – prostě vrcholy zdvojíme a dvojčata oznčující vstup do vrcholu a výstup z vrcholu spojíme právě jednou hranou s příslušnou kapacitou.

Můžeme požadovat dodržení maximální kapacity průtoku přes jednotlivé vrcholy. Nebo můžeme chtít dodržet nejen maximální ale také minimální toky přes jednotlivé hrany či vrcholy.

Přidání kapacit vrcholů je jednoduché – prostě vrcholy zdvojíme a dvojčata oznčující vstup do vrcholu a výstup z vrcholu spojíme právě jednou hranou s příslušnou kapacitou.

Omezení minimálními průtoky lze zahrnout do iniciace našeho algoritmu. Je ovšem zapotřebí otestovat, jestli takový tok vůbec existuje.

Můžeme požadovat dodržení maximální kapacity průtoku přes jednotlivé vrcholy. Nebo můžeme chtít dodržet nejen maximální ale také minimální toky přes jednotlivé hrany či vrcholy.

Přidání kapacit vrcholů je jednoduché – prostě vrcholy zdvojíme a dvojčata oznčující vstup do vrcholu a výstup z vrcholu spojíme právě jednou hranou s příslušnou kapacitou.

Omezení minimálními průtoky lze zahrnout do iniciace našeho algoritmu. Je ovšem zapotřebí otestovat, jestli takový tok vůbec existuje.

V literatuře lze najít řadu dalších nuancí, nebudeme se jim zde věnovat.

Hezkým využitím toků v síti je řešení úlohy bipartitního párování. Úlohou je v bipartitním grafu najít maximální podmnožinu hran takovou, aby žádné dvě hrany nesdílely vrchol.

Jde o abstraktní variantu docela obvyklé úlohy – třeba spárování kluků a holek k tanci v tanečních, kdybychom měli předem známé možnosti, ze kterých vybíráme.

Tento problém docela snadno převedeme na hledání maximálního toku. Přidáme si uměle navíc ke grafu zdroj, který propojíme hranami jdoucími do všech vrcholů v jedné skupině v bipartitním grafu, zatímco ze všech vrcholů ve druhé skupině vedeme hranu do přidaného stoku. Všechny hrany opatříme maximální kapacitou 1 a hledáme maximální tok. Za páry pak bereme hrany s nenulovým tokem.

Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

„Nim“. Na stole leží hromádka n sirek. Dva hráči střídavě odebírají jednu až pět sirek. Kdo nemá co vzít, prohrál.

„Nim“. Na stole leží hromádka n sirek. Dva hráči střídavě odebírají jednu až pět sirek. Kdo nemá co vzít, prohrál.

- ▶ Existuje za nějakého hráče vyhrávající strategie?

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.
- ▶ Pro každou pozici a každého hráče je popsána množina přípustných tahů, tj. množina pozic, do kterých se může hra jedním tahem dostat.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.
- ▶ Pro každou pozici a každého hráče je popsána množina přípustných tahů, tj. množina pozic, do kterých se může hra jedním tahem dostat.
- ▶ Hráči se střídají na tahu.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.
- ▶ Pro každou pozici a každého hráče je popsána množina přípustných tahů, tj. množina pozic, do kterých se může hra jedním tahem dostat.
- ▶ Hráči se střídají na tahu.
- ▶ Hra končí v okamžiku, kdy hráč na tahu nemůže táhnout (nemá k dispozici žádný přípustný tah). Hra podle **normálních pravidel** končí prohrou zmíněného hráče. Pokud ten, kdo nemůže táhnout vyhrává, hovoříme o hře „na žebráka“.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.
- ▶ Pro každou pozici a každého hráče je popsána množina přípustných tahů, tj. množina pozic, do kterých se může hra jedním tahem dostat.
- ▶ Hráči se střídají na tahu.
- ▶ Hra končí v okamžiku, kdy hráč na tahu nemůže táhnout (nemá k dispozici žádný přípustný tah). Hra podle **normálních pravidel** končí prohrou zmíněného hráče. Pokud ten, kdo nemůže táhnout vyhrává, hovoříme o hře „na žebráka“.
- ▶ Hra končí po konečném počtu tahů.

Kombinatorické hry

- ▶ Hra dvou hráčů.
- ▶ Existuje množina (většinou konečná) všech možných pozic ve hře.
- ▶ Pro každou pozici a každého hráče je popsána množina přípustných tahů, tj. množina pozic, do kterých se může hra jedním tahem dostat.
- ▶ Hráči se střídají na tahu.
- ▶ Hra končí v okamžiku, kdy hráč na tahu nemůže táhnout (nemá k dispozici žádný přípustný tah). Hra podle **normálních pravidel** končí prohrou zmíněného hráče. Pokud ten, kdo nemůže táhnout vyhrává, hovoříme o hře „na žebráka“.
- ▶ Hra končí po konečném počtu tahů.

Hru nazýváme **nestrannou**, pokud množina přípustných tahů v dané pozici nezávisí na tom, který hráč je na tahu. V opačném případě hovoříme o **partizánské** hře.

Graf nestranné hry

Je orientovaný graf, jehož uzly jsou tvořeny všemi různými pozicemi, hrany odpovídají přípustným tahům.

Graf nestranné hry

Je orientovaný graf, jehož uzly jsou tvořeny všemi různými pozicemi, hrany odpovídají přípustným tahům.

Graf kombinatorické nestranné hry je acyklický.

Graf nestranné hry

Je orientovaný graf, jehož uzly jsou tvořeny všemi různými pozicemi, hrany odpovídají přípustným tahům.

Graf kombinatorické nestranné hry je acyklický.

P a N pozice hry.

Plán přednášky

Literatura

Toky v sítích

Problém maximálního toku v síti

Další aplikace

Hry

Sprague–Grundyho teorie

Nechť hra je representována acyklickým orientovaným grafem (V, H) . Spragueova-Grundyova funkce je funkce $g : V \rightarrow \mathbb{N}_0$, kterou definujeme následovně:

- ▶ $g(v) = 0$ pro všechny listy

Nechť hra je representována acyklickým orientovaným grafem (V, H) . Spragueova-Grundyova funkce je funkce $g : V \rightarrow \mathbb{N}_0$, kterou definujeme následovně:

- ▶ $g(v) = 0$ pro všechny listy
- ▶ pro $v \in V$ takový, že jsou ohodnoceni všichni jeho následníci definujeme

$$g(v) = \min\{a \in \mathbb{N}_0 \mid \text{neexistuje hrana } (v, w), \text{ kde } g(w) = a\}$$

Nechť hra je representována acyklickým orientovaným grafem (V, H) . Spragueova-Grundyova funkce je funkce $g : V \rightarrow \mathbb{N}_0$, kterou definujeme následovně:

- ▶ $g(v) = 0$ pro všechny listy
- ▶ pro $v \in V$ takový, že jsou ohodnoceni všichni jeho následníci definujeme

$$g(v) = \min\{a \in \mathbb{N}_0 \mid \text{neexistuje hrana } (v, w), \text{ kde } g(w) = a\}$$

Theorem

Pozice hry odpovídající uzlu v v grafu hry je P právě když $g(v) = 0$.

Součtem her representovaných grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ rozumíme hru s grafem $G = (V, H)$,
kde $V = V_1 \times V_2$,
a $H = \{(v_1 v_2, w_1 v_2) \mid (v_1, w_1) \in H_1\} \cup \{(v_1 v_2, v_2 w_2) \mid (v_2, w_2) \in H_2\}$.

Součtem her representovaných grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ rozumíme hru s grafem $G = (V, H)$, kde $V = V_1 \times V_2$, a $H = \{(v_1 v_2, w_1 v_2) \mid (v_1, w_1) \in H_1\} \cup \{(v_1 v_2, v_2 w_2) \mid (v_2, w_2) \in H_2\}$.

Theorem

Pro orientované acyklické grafy $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ a $G = (V, E) = G_1 + G_2$ a jejich Spragueovy–Grundyovy funkce g_1 , g_2 a g platí:

$$g(v_1 v_2) = g(v_1) \oplus g(v_2)$$

Theorem

Každá nestranná hra je ekvivalentní zobecněné Nim hře.