Třetí demonstrovaná cvičení k MB103

Úlohy z domácí sady druhého týdne

Příklad 1. Určete stacionární body funkce

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$$

a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokální extrémy a jakého druhu.

Příklad 2. Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

v bodě $[1, 1]$.

Příklad 3. Prozkoumejte stacionární body funkce

$$f(x, y) = x^a \, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

pro $a = 1, 2, 3$. (Pokud Vám nestačí pro některý z bodů druhé derivace, ponechejte nerozhodnuté, doporučujeme zkusit načrtnout graf funkce.)

Nové úlohy

Parciální derivace složených zobrazení se počítají obdobně jako u funkcí jedné proměnné. Pouze je třeba si uvědomit, že derivace je lineární zobrazení dané maticí parciálních derivací a lineární přiblížení složeného zobrazení je dáno jako složení příslušných zobrazení, tj. vynásobením příslušných matic.

Úloha 1. Spočtěte parciální derivace podle proměnných x a y funkce $g(x, y)$, která je v polárních souřadnicích zadána vztahem $g(r, \phi, t) = \sin(r-t)$, kde t je parametr. (Funkci si můžete představit jako popis vlnění hladiny v čase t po pádu kamene v počátku souřadnic v čase $t = 0$.)

V případě funkcí jedné proměnné $f(x)$ se spojitou derivací existuje v okolí bodu x_0 funkce inverzní f^{-1} právě, když derivace $f'(x_0) \neq 0$. Pak je derivace $(f^{-1})'(x_0) = (f'(x_0))^{-1}$. Obdobně je tomu u zobrazení – inverze existuje právě, když je matice parciálních derivací invertibilní a je zadána právě inverzní maticí.

Úloha 2. Spočtěte derivace obou směrů transformace mezi kartézskými a polárními souřadnicemi v $\mathbb{R}^2$.

Funkce a zobrazení lze zadávat implicitně. V nejjednodušším případě funkcí jedné proměnné to znamená, že zadáme rovnost $f(x, y) = 0$ známou funkcí f dvou proměnných a hledáme funkci $y = g(x)$ takovou, že po dosazení platí $f(x, g(y)) = 0$. Pokud existují spojité parciárlní derivace f, taková funkce g existuje v okolí bodu (x_0, y_0) splňujícího rovnici $f(x_0, y_0) = 0$, jestliže v bodě (x_0, y_0) je parciální derivace f_y nenulová. Navíc pak je z vyjádření diferenciálu složené funkce $f(x, g(x))$ vidět, že potom

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Úloha 3. Ukažte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^x sin(y) + e^y sin(x)$ definuje předpisem $f(x, y) = 1$ pro $(x, y) \in \langle 0, \pi/2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$ implicitne proměnnou y jako funkci proměnné x, $y = g(x)$. Určete $g'(x)$.

Obdobně postupujeme, pokud máme více proměnných a případně více podmínek. Pro $m + n$ proměnných a n podmínek (tj. místo reálné funkce f máme zobrazení F do $\mathbb{R}^n$, tj. n funkcí), děje se totéž, jen opět místo hodnot parciálních derivací pracujeme s vektory a maticemi.

Úloha 5. Určete funkci $z = z(x, y)$ splňující rovnici

$$F(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin xz = 1$$

a spočtěte její parciální derivace v bodě $(x, y, z) = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}, 0)$.

Často je třeba hledat extrémy funkčních hodnot pouze na podmnožinách zadaných podmínkami $F(x, ..., z) = 0$. Teoreticky bychom mohli využít nástrojů na hledání stacionárních bodů funkcí po vyjádření některých z proměnných jako implicitně zadané funkce. To ale není praktické. Místo toho je možné spočíst stacionární body přímo pomocí tzv. Lagrangeových multiplikátorů. Jde o to, že pro funkci $F(x, y, .., z)$ je její gradient, tj. vektor parciálních derivací právě směr, ve kterém funkce nejrychleji roste. Ve směrech nadroviny kolmé ke gradientu je proto stacionární. Potenciální body extrému jsou tedy ty, v nichž gradient funkce, jejíž extrémy hledáme, je kolmý na plochu zadanou podmínkami, tj. lze jej vyjádřit pomocí gradientů F.

Úloha 6. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y$ na podmnožině dané $F(x, y) = y - x^3 - 2x = 1$ pro $x \in \langle 0, 5\rangle$.

Úloha 7. Ptačí budka má spodní dno o ploše 10 jednotek a je uzavřená ze tří stran (v každém případě je uzavřená shora). Jaký bude poměr stran dna, aby byl povrch (tj. množství použitého materiálu) co nejmenší?